ISSN 0915-2318 平成2年3月5日第三種郵便物認可
令和6年7月1日発行　毎月1回1日発行　第36巻第7号（通巻424号）

NTT技術ジャーナル

7 JULY 2024
Vol.36 No.7

特集

未知に挑む数学研究と夢

トップインタビュー

木下　真吾
NTT執行役員　研究開発マーケティング本部　研究企画部門長

グループ企業探訪

DOCOMO Innovations

from IOWN Global Forum

IOWN Global Forum 第4回年次会合と活動状況の報告

NTT
技術ジャーナル

7 JULY 2024
Vol.36 No.7

C O N T E N T S

URL https://journal.ntt.co.jp/backnumber/2024/vol3607
DOI https://doi.org/10.60249/24070000

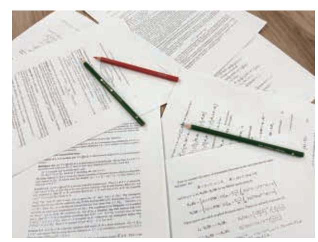
4 トップインタビュー

シンプルに，正直に向き合い，伝える．実績に裏打ちされた「直観力」を磨き上げる

木下　真吾
NTT執行役員
研究開発マーケティング本部　研究企画部門長

8 特集

未知に挑む数学研究と夢



10 数論・代数幾何・表現論が紡ぐ数学の世界
16 力学系に現れる数論的課題
19 多様な数学が交差する複素力学系の世界――非アルキメデス的力学系の視点から
24 モチーフ理論――数・形・圏の織りなす抽象絵画
28 行列式に始まる表現論と組合せ論
33 対称性とリー群・リー環の表現論
38 保型形式とフーリエ展開
42 光と物質の相互作用とゼータ関数
47 主役登場　宮﨑 弘安　NTT基礎数学研究センタ

48 挑戦する研究者たち

柏野　邦夫

NTTコミュニケーション科学基礎研究所　フェロー

クロスモーダル表現学習技術により
バイオデジタルツインの実現をめざす

52 挑戦する研究開発者たち

岸山　祥久

NTTドコモ　6Gネットワークイノベーション部
（株式会社Space Compass）

「超カバレッジ拡張」をめざしてHAPSを実用化

58 明日のトップランナー

中辻　真

NTT人間情報研究所　特別研究員

AIと人のインタラクションが新たな世界へ導く
「Human-AI協調基盤の構築」

62 グループ企業探訪

DOCOMO Innovations, Inc.

シリコンバレーでオープンイノベーション志向の
研究開発・ビジネス開発によりNTTグループに貢献する会社

66 from IOWN Global Forum

IOWN Global Forum 第４回年次会合と活動状況の報告

68 Webサイト　オリジナル記事の紹介
８月号予定
編集後記

本誌掲載内容についてのご意見，ご要望，お問い合わせ先

日本電信電話株式会社　NTT技術ジャーナル事務局
E-mail　journal@ml.ntt.com

本誌ご購読のお申し込み，お問い合わせ先

日本電信電話株一般社団法人電気通信協会　ブックセンター
TEL（03）3288-0611　FAX（03）3288-0615
ホームページ　http://www.tta.or.jp/

NTT技術ジャーナルは
Webで閲覧できます．
https://journal.ntt.co.jp/

URL https://journal.ntt.co.jp/article/26999
DOI https://doi.org/10.60249/24071001

NTT執行役員
研究開発マーケティング本部　研究企画部門長
木下真吾 Shingo Kinoshita

PROFILE

1991年日本電信電話株式会社入社．2008年NTT情報流通プラットフォーム研究所　人事担当部長，2012年NTT研究企画部門　担当部長，2021年NTT人間情報研究所 所長を経て，2023年6月より現職．

シンプルに，正直に向き合い，伝える．実績に裏打ちされた「直観力」を磨き上げる

2023年に新中期経営戦略「New value creation & Sustainability 2027 powered by IOWN」を発表したNTTグループ．この実現に向け，NTT R&Dは「研究者が志をもち，わくわくし続けること」「圧倒的なテクノロジーでスケーラブルかつ持続的に社会に役立つこと」「未来を予測するのではなく，創造すること」「直観力を鍛え，独創的であること」を行動指針に掲げ，世界最高の研究開発を遂行しています．木下真吾NTT研究開発マーケティング本部　研究企画部門長にNTT R&Dの強みとトップとしてのあり方を伺いました．

70年余の歴史と世界トップクラスの人財の宝庫，NTT R&D

研究企画部門長となられて1年余りが経ちました．NTTのR&Dの置かれている状況などをお聞かせいただけますでしょうか．

2023年6月に研究企画部門長に就任し1年が経ちましたが，2023年3月にIOWN1.0の商用サービスを開始し，11月にはNTT版大規模言語モデル（LLM: Large Language Models）「tsuzumi」を発表し，2024年3月にはtsuzumiの商用サービスを開始する等，注力してきた研究が実用化やビジネスとして展開するフェーズへと移行しており，忙しくも充実した日々を過ごしました．研究の成果がビジネスとして展開されていくという大きな営みですから，お客さまはもちろんのこと，事業会社をはじめ多くの人と連携しながら進めてきました．

ご存じのとおり生成AI（人工知能）は世の中の動きが速く，社会のニーズにこたえるためにはそのスピードに合わせて研究開発を進める必要があるのですが，tsuzumiは当初の予定を半年前倒しして研究開発を急ピッチで進めてきました．

ところで，NTT R&Dの研究開発費や研究員数は，世界的なICT企業の中では，実はそれほど大きくありません．現在，NTT R&Dの研究員は約2200人，研究開発費は約1200億円程度です．国内では大規模ですが，GAFAM等と比較すると，研究員は数分の1，研究開発費に至っては数10分の1です．

驚きました．研究開発投資額，研究員数において「桁違い」のリソースを持つ世界的な企業とどうやったら互角に戦えるのでしょうか．

NTT R&Dの強みとして，豊富な人財があげられます．非常に優れた研究員が数多く在籍しているのです．研究開発費の差を埋めるべく，成果を上げるための創意工夫をしていますし，私たちマネジメントも資金や人材面において最大限にサポートするようにしています．

研究レベルを評価する尺度として投稿論文数がありますが，NTT R&Dは，ICT関連の企業の中で世界9位にランクインしています．特に，光通信，情報セキュリティ，神経工学，音声認識，量子計算機等の分野においては，論文数はGoogleやIBMにも勝る世界1～2位を誇っています．研究員数や研究開発費の規模がこれだけ違う中で，この実績を上げることができるのは，まさに研究員の質の高さによるものです．これをさらに確たるものとしていくために，論文数ランキングを数年後に5位にまで押し上げたいと思っています．

また，NTT R&Dには人財に加えて70年余の歴史があります．GAFAM等は研究所の歴史はそれほど長くなく，人材も流動的であったりします．一方，私たちは70年近くをかけて先輩から後輩へと脈々と受け継がれてきた研究の歴史を持っています．加えて，ネットワークからAIや量子までと

ても広範囲な研究領域の研究者が「同僚」として交流できますからシナジーが生まれやすいのです．これは外部においてはオープンイノベーションと呼びますが，私たちは研究所内でも幅広いイノベーションを起こすことができます．

また，研究者のモチベーションが高いことも強みです．研究者にとって金銭的な報酬も重要ですが，それ以上に取り組む研究テーマの自由度や快適な研究環境に加えて，誰と研究できるかがもっとも大切です．NTT研究所には，世界的にも著名な研究者，例えば，暗号，ブロックチェーンの世界的権威である岡本龍明フェロー，大容量スケーラブル光ネットワーク基盤技術であれば宮本裕フェロー，音声音響信号処理・符号化であれば守谷健弘フェロー等，各分野で名だたる研究者が多数在籍しており，こうしたトップランナーをロールモデルに研究スタイルやスピリットが受け継がれているとともに，これが研究者の求心力となって歴史が築かれているのです．この意味でNTTのR＆Dは人財の宝庫なのです．

IOWN構想とNTT版LLM「tsuzumi」の社会実装に向けて

現在のR＆Dの代表的な取り組みをご紹介いただけますか．

まず，2023年11月に報道発表したNTT版LLM「tsuzumi」を紹介します．tsuzumiは軽量，高い言語性能，柔軟なカスタマイズ，マルチモーダルの4つの特長を持っています．

1番目の特長は軽量性です．tsuzumiには超軽量版tsuzumi-0.6Bと軽量版tsuzumi-7Bの2種類があります．代表的なLLMであるGPT-3クラスには大規模な計算機が必要になります．例えば開発時には原子力発電所の原子炉1基・1時間分の電力を必要としますし，利用時には上位のGPUが複数台必要となります．一方，tsuzumiの場合は，電力もGPU数も数10分の1まで低減できます．

2番目の特長は高い言語性能です．生成AIの性能評価手法であるRakudaベンチマークで評価すると，tsuzumiはGPT-3.5に80％以上の勝率を誇り，ほかの日本のトップクラスの4つのLLMにも圧倒的な勝率を誇ります．

3番目の特長は，柔軟なカスタマイズです．LLMは，一般的な質問に対して答えることは得意ですが，特定の業界や企業に特化した質問に対しては回答が難しくなります．tsuzumiは，それを解決するために，さまざまなチューニング方法を備えています．

最後の特長はマルチモダリティです．一般的なLLMは，言語で質問し，言語で回答しますが，tsuzumiは，言語だけでなく，図表や写真，音声など視覚や聴覚等を理解することができます．

ではこのような優れた特長を非常に短期間で開発できたのか．それはNTT研究所の技術力によるところが大きいのです．

例えば，LLMは，AI分野の中でも自然言語処理が非常に重要ですが，その分野の難関国際会議の論文数ランキングでは，世界トップクラスで，国内では1位となっています．また，翻訳等の世界コンペティションで1位を獲得したり，国内研究会でも多くの賞を受賞しています．

また，LLMの開発にあたっては質の高い学習データを大量に用意する必要がありますが，私たちは事前学習用に日英だけではなく，21言語さらにプログラミング言語を含む1兆以上のトークン（テキスト解析の最小単位）の学習データを用意しました．領域も各種専門分野からエンタテインメントまで非常に幅広い分野をカバーしています．また，事前学習のあとのインストラクションチューニングにおいては，広範囲なデータを新規作成するとともに，40年という長年の自然言語処理研究で蓄積してきた翻訳・要約・対話・読解などの既存の学習データを活用しました．

実用化が待ち遠しいですね．それにはIOWN構想の進展もかかわるのでしょうか．進捗をお聞かせいただけますか．

IOWN構想は2019年の発表から研究・開発・実用化と進めて，2023年3月には初の商用サービスとなるIOWN 1.0を開始しました．現在は，光電融合デバイスの実用化や，通信領域およびコンピューティング領域への適用，そして，それらを最大限活用するデジタルツインコンピューティングや次世代汎用AIなどに取り組み，IOWN構想の社会実装をめざして研究開発を進めています．

次のマイルストーンであるIOWN 2.0，3.0，4.0について紹介します．

IOWN 1.0では，データセンタ間を電気変換することなくすべて光で接続しますが，IOWN 2.0では，第2世代の光電融合デバイスPEC-2を用いてデータセンタ内の計算機ボード間をすべて光で接続します．さらに，IOWN 3.0では，第3世代光電融合デバイスPEC-3を用いて計算機ボード内の半導体パッケージ間を，IOWN 4.0では，第4世代光電融合デバイスPEC-4を用いて半導体パッケージ内のダイ（チップ）間をもすべて光で接続できるようになります．

光の適用領域が半導体パッケージの中に入り込むことで，圧倒的な高速広帯域性，低消費電力性を実現していきます．

また，IOWNはLLMの研究開発にとっても重要な役割を果たします．例えば，今回のtsuzumiの開発にあたっては，学習データを横須賀に，GPUクラスタを三鷹に設置し，その間をIOWN 1.0のAPNで接続することによって，100 kmという距離を感じさせない効率的なLLMの学習環境を実現することができました．

IOWN 2.0以降はLLMの研究開発においてさらに重要になっていきます．既存の計算機では，CPUやGPUの構成が固定化されており，CPUがボトルネックとなってGPUの性能を十分に引き出せないケースも出てきます．一方，IOWNによって必要な数のCPUやGPUを部品単位で光によりダイレクトに接続し，柔軟な構成をとることができるようになります．これによって，LLMの学習や推論に最適化されたCPU, GPUの組合せをダイナミックに制御できるようになります．

さらに未来の話になりますが，NTTがめざすAIの世界として，AIコンステレーションというものを考えています．これは１つのモノシリックな巨大なLLMをつくるのではなく，小さく専門性を持ったLLMを複数組み合わせることによって，１つの大きなLLMより賢く，より効率的に実装することができないか，ということで次世代のアーキテクチャを考えています．

例えば学生，高齢者，小学校教諭，子育て中の親，医師のようなさまざまなキャラクターを持ったAIが「人口が減っている我が地域の活性化に何が必要ですか」という問題に対して，それぞれが自分たちの意見を言いながら，その意見を組み合わせたり，あるいは合意形成を取ったり，たまに人が入ってインタラクションを取りながら１つの合意形成をつくっていく仕組みができないかと考えています． 大量に分散したAI間の連携を効率よく行うためにもIOWNが非常に重要となります．

４つの行動指針の下，相互にフェアに評価し合える環境を整える

トップとして大切にしていることをこれまでの歩みを踏まえて教えていただけますか．

私は1991年に研究者としてNTTでの道を歩み始めました．それはNTTが民営化された直後で，インターネットは黎明期を迎えたころです．私は大学で物理を専攻していたのですが，この領域の研究の難しさを感じていたことや，NTTやコンピュータの新しさに魅力を感じ研究所に飛び込んだのです．

正直，通信に関しては何の知識もありませんでしたから入所してから相当苦労しました．それでも，非常に優秀な先輩方がいろいろ教えてくださって一気に研究が好きになりました．私は新しいものが好きなので，新しい研究テーマに出会うとまるでおもちゃをもらったようにわくわくし，論文が学会に採択されたり，引用されたりするととても嬉しかったです．

また，東京オリンピックでは数百人を束ねる大規模な実用化研究にも取り組みました．フェーズによって研究の醍醐味は違いますが，研究，開発，実用化のどのフェーズもそれぞれの面白さがあります．やはり，研究成果によって世の中に貢献できる喜びは大きいです．

こうした背景から研究企画部門長という立場となった今は，研究者１人ひとりの喜びややりがい，特性をかんがみてバランスよく配属し，研究活動に勤しめるように環境を整えることに努めています．

私は物事と向き合うとき，シンプルであり，正直であることを大切にしています．組織で働くと多方面に配慮や調整をした結果，物事が必要以上に複雑化したり，本来のあるべき姿からずれてしまうことがあります．こういうときこそ研究者は，誰が見ても分かりやすく，納得感のある研ぎ澄まされたシンプルさを大切にすべきだと思っています．

時に，複雑にねじれてしまっても，方向修正が大変なため，仕方がなく受け入れてしまうことがあるかもしれませんが，中長期的な観点では，その段階で原点に立ち返り，シンプルにあるべき姿に戻す方が近道になります．何事もあきらめることなく，自分に正直に向き合っていきたいですね．

今後，NTTのＲ＆Ｄはどのように展開されるでしょうか．

私は「研究者が志をもち，わくわくし続けること」「圧倒的なテクノロジーでスケーラブルかつ持続的に社会に役立つこと」「未来を予測するのではなく，創造すること」「直観力を鍛え，独創的であること」をNTT研究所の行動指針として示しています．

通信ネットワークや計算機などの研究が途に就いた当時は，速くて安いものをつくれば，必ず使ってもらえました．つまり，研究者が考える「いいもの」を研究・開発・実用化すれば，「世に恵を提供する」ことができたのです．しかし，昨今の社会は，変化が激しく，複雑で，価値観が多様化しているため，研究者が考える「いいもの」と社会が求める「いいもの」とは嚙み合わないようになってきました．特にグローバルではその傾向が顕著です．

こうした世の中において，掲げた行動指針の下，吉田五郎初代電気通信研究所長の言葉「知の泉を汲んで研究し実用化により世に恵を具体的に提供しよう」を改めて心に刻んで研究開発をリードしていきたいと思います．すなわち，世界最高峰の地位を確固たるものにできるよう「知の泉を汲んで研究し」，「実用化により」IOWN構想を世の中に実装し，さらに，マーケットニー

ズをベースに，研究を企画・推進していくマーケットイン型研究と，マーケットも気付いていない未来を自らが創造するプロダクトアウト型研究をバランスよく取りながら，「世の中に具体的な価値を提供」する覚悟をもって取り組んでいきます．

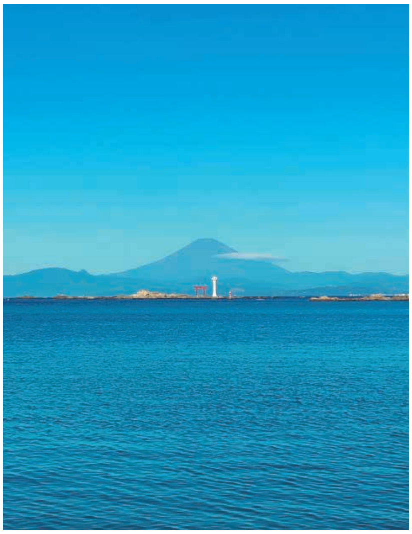
そして「直観力」を大切にしたいと思います．研究の世界では，その分野を極めた人だけが持つ研究の勘というものがあります．実績に裏打ちされた直観は「あの人が言うならば…」と人を動かす力を持ちます．だからこそ，研究者の皆さんには実績を積み上げていただきたいと考えています．一方で，実績を積み上げている若い研究者の皆さんの直観も受け取る力を私たちマネジメントも養い続けていきたいと考えています．その意味で，研究者として互いにフェアに評価し合える環境で数多くの研究成果を輩出していきます．パートナーはじめ社会の皆様，世界最高の研究開発を遂行する私たち研究者を，そして研究成果を使い倒してください．

（インタビュー：外川智恵／撮影：大野真也）

インタビューを終えて

プラチナのロングヘアにフューシャピンクのネクタイ．スタイリッシュなスーツ姿で颯爽とインタビュー会場に登場した木下部門長．穏やかな語り口で，研究開発の実際と展望を包み隠さずお話しくださいました．例えば，R&Dが次々に発信する世界に誇る研究成果を淡々と話されながら「ビジネスとして成立させるには，ターゲットの文化的なコンテクストも理解しなくてはなりません」と，現状の課題も正直にお話しくださるのです．

一方で，ちょっとした冗談や昔話には目を細めて笑われて，周囲を和ませてくださるというあたたかさもお持ちの木下部門長．目下の息抜きは散歩だといいます．時間のあるときは1時間，2時間と自然を感じながら歩かれるとか．そんな木下部門長に，どんなトップになりたいかを伺うと「カジュアルに付き合える人でありたいですね．どんな立場の研究者ともストレートに意見の言い合える仲でありたいのです．研究者にとって技術が正解ですから，嘘をついたらばれてしまいます．だからこそ，技術について正直に遠慮なく議論し合える相手でありたいと思います」とおっしゃりました．曇りのない言葉や，人としてのぶれない軸を感じ，その姿勢が信頼を勝ち取っているのだと実感したひと時でした．



葉山の海岸を四季の変化を感じながら散歩し，美しい景色や自然を写真におさめています．

特　集

未知に挑む数学研究と夢

本特集では，2021年10月に発足した基礎数学研究センタの取り組みを紹介する．
具体的な研究の紹介を通じて基礎数学の発展や夢，
また物理学などの異分野とのつながり，
さらには好奇心と自由な発想に基づき探究する基礎数学の考え方や展望を紹介する．

数論・代数幾何・表現論が紡ぐ数学の世界 ―― 10

NTT基礎数学研究センタでの研究の全体像を俯瞰し，中心的な研究領域である「数論力学系」「代数幾何・数論幾何」「表現論・保型形式」について紹介する．

力学系に現れる数論的課題 ―― 16

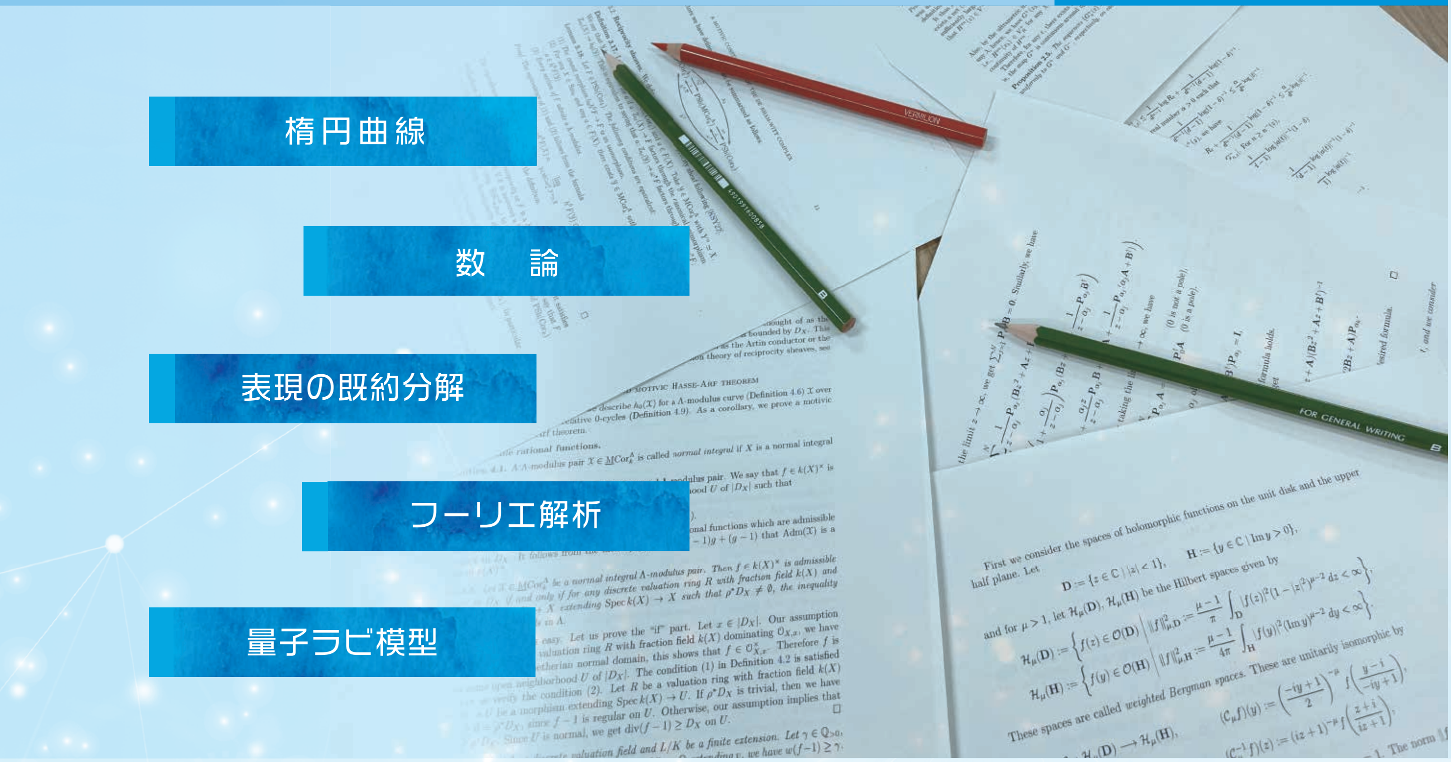
数論寄りの問題意識でみた数論力学系について，特に何らかの曲線の有理点の決定問題に関連する問題群について紹介する．

多様な数学が交差する複素力学系の世界 ――非アルキメデス的力学系の視点から ―― 19

複素力学系を，整数論という全く異なる分野で生み出された非アルキメデス的数と呼ばれる数の理論を用いた研究について紹介する．

モチーフ理論――数・形・圏の織りなす抽象絵画 ―― 24

モチーフ理論の概要と，執筆者らによるモチーフ理論の一般化の試みについて紹介する．



行列式に始まる表現論と組合せ論　28

リー群の中でも行列の線型変換としての合成で積が定義されている行列のなす群，一般線型群の表現論の研究について紹介する．

対称性とリー群・リー環の表現論　33

線形空間の連続的な対称性を抽象化したリー群・リー環の表現の基本的かつ重要な具体例，および最新の研究について紹介する．

保型形式とフーリエ展開　38

保型形式の歴史を振り返りながら，表現論とフーリエ解析，保型形式のかかわり，現代の保型形式論の問題点について紹介する．

光と物質の相互作用とゼータ関数　42

光と物質の相互作用の背後に隠れる整数論的な構造を，多様な数学を基盤に相互作用の分配関数とスペクトルゼータ関数の特殊値に着目して紹介する．

主役登場　宮﨑 弘安　NTT基礎数学研究センタ　47

異なるものを「つなぐ」抽象化の力

URL　https://journal.ntt.co.jp/article/27001
DOI　https://doi.org/10.60249/24075001

数論・代数幾何・表現論が紡ぐ数学の世界

NTT基礎数学研究センタでは，数学の基礎研究をとおして科学技術の源泉である「知の泉」をより豊かにしたいと考えています．本稿ではまず，NTT基礎数学研究センタでの研究の全体像を俯瞰します．さらに，センタの中心的な研究領域である「数論，特に数論力学系」「代数幾何・数論幾何」「表現論・保型形式」について紹介します．

キーワード：#楕円曲線，#ガロア理論，#ゼータ関数

佐野（さの）　薫（かおる）
宮﨑（みやざき）　弘安（ひろやす）
若山（わかやま）　正人（まさと）

NTT基礎数学研究センタ

数論・代数幾何・表現論が紡ぐ数学の世界

およそ2500年前のギリシャで，素数の研究がなされたことは驚きです．素数が無限に存在することや自然数が素数の積に一意に分解できることが示されていました．どんな動機があったのかは不明です．しかも1977年のリベスト，シャミア，エーデルマンによるRSA暗号方式の発明まで，その工学や社会での応用は期待さえありませんでした．加えてRSAの鍵となる「pを素数，aを整数とすれば$a^p \equiv a \pmod{p}$が成り立つ」というフェルマーの小定理[1]の発見（証明はライプニッツ）後も，その確立に300年余を要しました．

数論（整数論）は，数，特に整数およびそれから派生する数の体系の性質について研究する数学の一分野です[2]．ここで考える数の体系とは，加減乗除がその中で自由にできる分数全体がなす有理数（整数/整数の形で表せる数）体のような代数体をはじめ，有限集合からなる有限体，有理数列の極限として得られる数全体としての実数体やp−進数全体がなすような局所体と呼ばれるものなどです．数論はローマ帝国時代のディオファントス方程式の研究に起源を持つとされています．ディオファントス方程式とは，有理数を係数とする多項式により定まるものです．できればそれを解きたいのですが，一般には困難です．そこで解も再び有理数になるものに関心が向かいます．というのも無理数（有理数ではない実数）は有理数の極限ということから，数として不完全なものと考えられたからでしょう．有理数は無数にあるものの，実数のほとんどは無理数です．ですが，それを十把一絡げにしてしまうのでは，宇宙の中で暗黒物質について考えないのと同じです．科学としても物足りません．例えば，$x^2-2=0$は$\sqrt{2}$という無理数の解を持ちます．$\sqrt{2}$や$\sqrt[3]{3}$などは代数的数といわれ，円周率π，ネイピア数eや$2^{\sqrt{2}}$などの超越数と区別されます．ところで，$\sqrt{2}$や$\sqrt[3]{3}$に対しては，それぞれを定義する有理数極限に戻るまでもなく掛け算の計算$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{72}$ができます．つまり，代数的数の全体はその中で閉じた数の体系を定めます．さらに，$\sqrt{-1}$なども導入され，人類は数という概念を広げてきました．今も，人類には代数的数よりも広い良いクラスの数を見つけたいとの問題意識があります．実際，円周率$\pi=\int_{x^2+y^2<1}dxdy$のような「周期」と呼ばれる積分表示を持つ超越数たちの間に，代数的に統制される広い良いクラスを見出せないかという期待があります．コンセビッチ-ザギエ予想といわれるものです．解決は難しそうですが１つの理想の姿です．なお，これらの数に対する意識は，ギリシャの３大作図問題などとも密接にかかわるものでした．

さて，与えられた方程式が有理数解を持つかどうかは，大変デリケートな問題です．$x^2+y^2=1$ は座標が有理数である有理点を無限に持ちます．円と平面上の点（$-1,0$）を通る傾きが$\tan\frac{\theta}{2}$の直線との交点を考え（三角関数の２倍角公式を利用）れば（**図１**），確認は容易です．しかし，この円を少し縮めただけの円$x^2+y^2=0.999999$には有理点が存在しません．微妙さといえば，$x^n+y^n=1$（$n=3,4,5...$）には，自明なもの以外の有理点は存在しないというフェルマー予想（最終定理）の解決には，およそ350年を必要としました．それは，代数的視点に加え，円（加法定理により加法を積演算とするアーベル群の構造を持ちます）を越えて，楕円曲線（**図２**）というアーベル群の構造を持つ図形から局所的に定まるゼータ関数と（表現論[4]にかかわり）大域的に定まるゼータ関数の一致を認めるための現代数学の粋を駆使した理論なしには果たせないものでした．

このフェルマー予想をはじめ，数論のいくつかの問題は他の数学分野に比して問題そのものの理解は容易です．組合せ論・グラフ理論も似た特徴があります．しかもそのいくつかは，数論と表現論に深く関係していて，例えばラマヌジャングラフのような効率の良いネットワーク構成に顕著な役割を果たすものもあります．ただし，使われる手法は多岐にわたり，また非常に高度な（数式というよりは，対象を結ぶ →（矢印）を用いて述べられる多様な抽象的概念を駆使する）現代数学の飛び道具の運用が欠かせないのが普通です．そのため，多くの予想（傍証はあるが解決が困難で，種々の深い数学を巻き込む必要があると思われる言明）がなされ，いくつもが未解決のままにあります．提示後165年を経過して，いまだなお人類を寄せ付けないでいるリーマン予想や楕円曲線の構造を決めるバーチとスイナートン・ダイヤー予想は中でも有

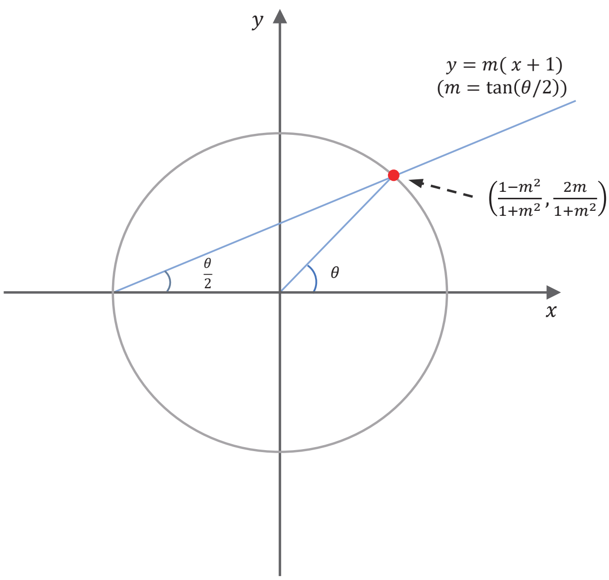


図１　三角関数の２倍角公式から
（傾きmを有理数にとると交点の座標も有理数となる）

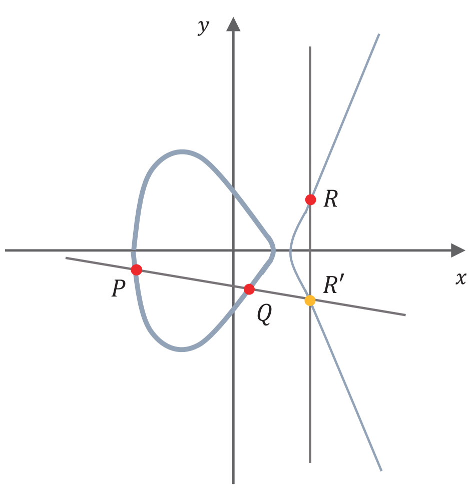


図２　楕円曲線上での加法$P+Q=R$（結合法則が成立）：PとQを通る線分と楕円曲線との交点をR'として，そのx軸に関する対称点をRと定める

名です．また，グロタンディークの代数幾何の革新によりドリーニュにより解決されたラマヌジャン予想やヴェイユ予想は，20世紀の数論を牽引しました．フェルマー予想の鍵であった谷山-志村予想，そして非可換類体論の構築をめざすラングランズ予想は壮大な夢を与えています．しかもこれらの多くが，（明治開国後，日本でなされた世界的・歴史的成果である）類体論を含めて，生い立ちの違うゼータ関数・L関数の一致として記述されることは，特筆すべきことです．

一方で，図形上の有理点や整数点を，多項式や有理関数による反復合成が定める力学系の下で，その軌道上の有理点や整数点を調べたり，アーベル群の構造を持つ図形上の有限位数の点を周期点ととらえたりと，幾何学的性質から数論的性質を導く研究も活発です．例えば，モーデル予想（ファルティングスの定理）を含みディオファントス幾何における遥か未踏のヴォイタ予想もこうした視点の先に理解できるものかもしれません．

このように数論は貪欲です．問題解決に必要とあれば，幾何学，解析学，確率論などどんなものでも使います．幾何的インスピレーションを積極的に投入して抽象的な図形の幾何学的性質から数論的性質を導くことや，無限を精緻に取り込みつつ不変性を持つ関数をふんだんに活用すること，さらには，確率論でお馴染みの分布や密度の様子を詳細に観察するという立場から，いわゆる測度論も議論の範疇に取り込みます．その結果，研究を進める際に多くの数学分野を巻き込むことになります．ひいてはそれぞれの分野の発展に寄与することも期待できます．古くは，ベルンハルト・リーマンによる素数分布に端を発する解析数論の研究が一変数複素関数論の発展を促しました．ところで，「数学は科学の女王であり，数論は数学の女王」といったのは，19世紀最大の数学者カール・フリードリヒ・ガウスです．普通これは，数論の美しさを端的に表したのだと受け止められていますが，真意は，その美しさとともに多様な数学の使いっぷりの良さにもあるのでしょう．

本特集で取り上げる数学研究は，数論の問題を，それぞれ代数幾何，力学系の手法で探求する数論幾何，数論力学や保型形式論，また，直接・間接的に数論にかかわる表現論，数理物理，複素やp－進体の力学系，組合せ論・グラフ理論，特殊関数論，微分方程式とトポロジーなどを背景にするものです．換言すれば，執筆メンバが属するNTT基礎数学研究センタは，数論の貪欲さに加えて，表現論が対称性を扱う学問として代数・幾何・解析・確率論が交差する分野であり多岐の応用があることから，その数学において，まとまりと広がりを同時に持つ研究推進組織です．

読者には，現代数学の大きな流れの一端に触れて楽しんでいただけることを願い，本特集を組みました．

数論・数論的力学系

■フェルマー予想

「この定理に関して，私は真に驚くべき証明を見つけたが，この余白はそれを書くには狭すぎる」とのコメントとともに，ディオファントスの著書「算術」の余白にピエー

ル・ド・フェルマーが書き残した以下の問題は，書き込み入りの「算術」が刊行された1670年以降，最終的に1995年にワイルズによる証明が検証されるまでの300年以上もの間，多くの数学者の挑戦を退け続け，数論幾何の分野の発展の礎となりました．

・フェルマー予想：nを３以上の整数とするとき(1) $x^n + y^n = 1$を満たす有理数の組 (x, y) $(xy \neq 0)$ は存在しない．

$n = 2$のとき方程式(1)は原点を中心とする半径１の円周を定めますが，この曲線の上には有理点（各座標が有理数であるような点）は無限にあります．さらにこれらの有理点はすべて，$(-1, 0)$を通る傾きが有理数tであるような直線との交点として実現できます（図１）．つまり，曲線の有理点が（無限大を許せば）tという傾きのパラメータのみで記述できるということです．直線の傾き全体として得られる空間は射影直線と呼ばれるものです．各変数に入る値を複素数まで広げて考えると，(1)で定まる図形は実二次元，つまり曲面になります．その曲面に空いた穴の数を種数といいます．幾何的には，射影直線は種数０で滑らかな曲線のことにほかなりません．また，種数１の滑らかな曲線（と固定した点との組）のことを楕円曲線といいます．楕円曲線は複素数の範囲で考えればそれはドーナツのような見た目の図形になります（**図３**）．(1)で定まる曲線は$n = 3, 4$では楕円曲線になります．フェルマー予想は$n = 4$のときにはフェルマー自身による無限降下法と呼ばれる方法で証明されていて，この方法は後述のモーデル-ヴェイユの定理の証明に拡張されています．$n = 3$のときには，数の世界を有理数全体から，１の３乗根を付け加えた数の全体に広げ，その数の世界における素因数分解の一意性を用いて証明されました．現代風にいえばこれは数体の拡大を考えていることになります．残念ながら一般の数体では素因数分解の一意性が成り立たないため，この方法を一般のnに拡張することはできませんが，このことを克服しようと見出されたクンマーの理想数の理論は現代ではイデアル論になり，体の拡大の考え方はガロア理論の基礎付けを与え，類体論を含む現代の整数論，数論幾何でも避けることはできない基礎理論の１つとなっています．nが５以上のときには，(1)で定まる曲線は種数２以上の曲線となります．このとき(1)の有理数解が有限個しかないことが，次の定理から従います．

・モーデル予想（＝ファルティングスの定理）：有理数係数の多項式で定まる滑らかな曲線は，種数が２以上であれば有理点を有限個しか持たない．

この定理は，曲線の種数という幾何的な情報と有理点の有限性という数論的な現象とのつながりを主張する驚くべきものであり，数論幾何の分野の金字塔の１つです．この結果によりファルティングスは1986年にフィールズ賞を受賞しました．フェルマー予想については解決に至るまでまだまだたくさんの触れるべき歴史がありますが，本稿ではこれまでとします．

■楕円曲線

種数０の曲線では有理点をパラメータ付けできることは述べましたが，種数１の楕円曲線の場合にはそれほど簡単ではありません．しかし楕円曲線の場合には有理点の“足し算”を考えることができ，有理点から有理点を次々につくることができます（図２）．すなわち楕円曲線の有理点の集合は群と呼ばれる構造を持っていて，この群構造について以下が成り立ちます．

・モーデル-ヴェイユの定理：楕円曲線Eの有限個の有理点$P_1, P_2, \ldots, P_r, Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$が存在し，$E$の任意の有理点$P$は$n_1 P_1 n_2 P_2 + \cdots + n_r P_r + Q_t$ ($n_1, n_2, \ldots, n_r$は整数, $1 \leq t \leq s$）の形にただ一通りに表すことができる．ただし$Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$はある正の整数倍でO（すなわち任意の有理点Pに対して$P + O = P$が成り立つような元）になる点たちである．

rのことを楕円曲線Eの階数といい，$Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$をEのねじれ点といいます．ねじれ点の部分に制限した際の群構造はメイザーにより完全に分析されている一方で，階数については現在でも未解決な部分が多いです．ミレニアム懸賞問題の１つ，階数とL関数の極の位数との一致を見るBSD予想のみならず，任意に大きい階数の楕円曲線の存在・非存在も未解決の問題です．現在見つかっている階数の世界記録はエルキースによる，28以上であることが証明されているものです．無限か否かが問題になっているにもかかわらず，世界記録が小さいことに驚くかもしれません．

■数論力学系

数論力学系（arithmetic dynamics）と呼ばれる分野に属する問題自体は1950年のノースコットによる定理（射影空間の数体上定義された射は有限個しか有理周期点を持たない）などからみられますが，実際に数論力学系と呼ばれ始めたのは2000年に入ってからです．数学分野の分類コードとして用いられている 2010 Mathematics Subject Classification（MSC2010）において11S82 Non-Archimedean dynamical systems [See mainly 37Pxx]，37Pxx Arithmetic and non-Archimedean dynamical systemが追加されたタイミングで，明確に１つの分野としての地位を数学界から認められたといえます．

図３　種数0，1，２の曲線

大雑把にいうと数論力学系とは，数論的に興味のある体（例えばp進数体や有理数体など）の上で，多項式や有理写像の反復合成（離散力学系）を考えたときに，有理点のふるまいなど，数論的な現象を調べる分野です．重心を数論側に置くか力学系側に置くかで問題意識は変わりますが，数論側に重心を置いた際のもう少し大きな目標としては，数論ないし数論幾何の分野で考えられているアーベル多様体に関する定理の，力学系類似（あるいは一般化）の辞書を完成させ，類似あるいは一般化された定理を与えることが挙げられます．ここで詳しく用語を説明することはできませんが，現時点で，例えば**表**のような類似が考えられています．

こういった，数体上の数論力学系に関する問題は本特集記事『力学系に現れる数論的課題』で詳しく紹介します．

力学系側に重心を置くと，いくらか博物学的な様相を呈しているように筆者にはみえていますが，複素力学系の理論の非アルキメデス体（p進数体など）の上の力学系での類似や拡張を行う試みや，それを用いた複素力学系や数論力学系への応用は分野のメインストリームです．p進数体をはじめとする，非アルキメデス体上の力学系は本特集記事『多様な数学が交差する複素力学系の世界――非アルキメデス的力学系の視点から』（**図4**）で紹介されます．

最近では数論力学系に関する本やサーベイ，関連する文献の膨大なリスト[3]が作成されています．リストにある論文たちのタイトルを眺めるだけでも，新しい分野が急成長を遂げている様子を垣間見ることができるでしょう．

代数幾何・数論幾何

■方程式と幾何学

方程式の解を求めることは数学の根本的な課題です．代数学では「多項式＝0」という形の方程式（代数方程式）の解を調べることが究極目標の1つです．方程式の研究において「グラフ」は非常に重要な概念です．例えば方程式 $x^2+y^2=1$ を実数の範囲で解き座標平面にプロットしてグラフを描くと，お馴染みの円が現れます．同様に，方程式 $y=mx$ のグラフは直線になります．さらに，これら2つの方程式の共通解は，グラフの交点として図形的に表現されます（図1）．方程式の解が描く図形（グラフ）を考えることで，人間の直感が働きやすい幾何の舞台に問題を持ち込み，幾何に特有の手法を用いて問題に取り組むことができます．

このような「方程式のグラフを描く」というアイデアは，1637年に刊行されたデカルトの「方法序説」で確立し，現在では初等教育で教授されるほど普及しています．しかし，上記の直感的な手法にも限界があります．実際，方程式の変数を増やすと，グラフは3次元空間内に描けなくなるため直接「目で見る」ことができなくなり，全く次元の異なる困難が現れます．このような複雑なグラフの性質を調べることを目的の1つとして，デカルト以降，多数の数学者が数世紀にわたる努力を重ねました．そうして出来上がったのが「代数幾何」という巨大な学問体系です．特に，19世紀から20世紀にかけての代数幾何の発展は，後の数学全体に影響を及ぼすほどの，非常に急激なものでした．

表　数論力学系類似の例

数論幾何	力学系
空間	軌道
空間の有理点・整数点	軌道の有理点・整数点
楕円曲線のねじれ点	有理写像の周期点・擬周期点
メイザーの定理	モートン-シルヴァーマンによる周期点の一様有界予想

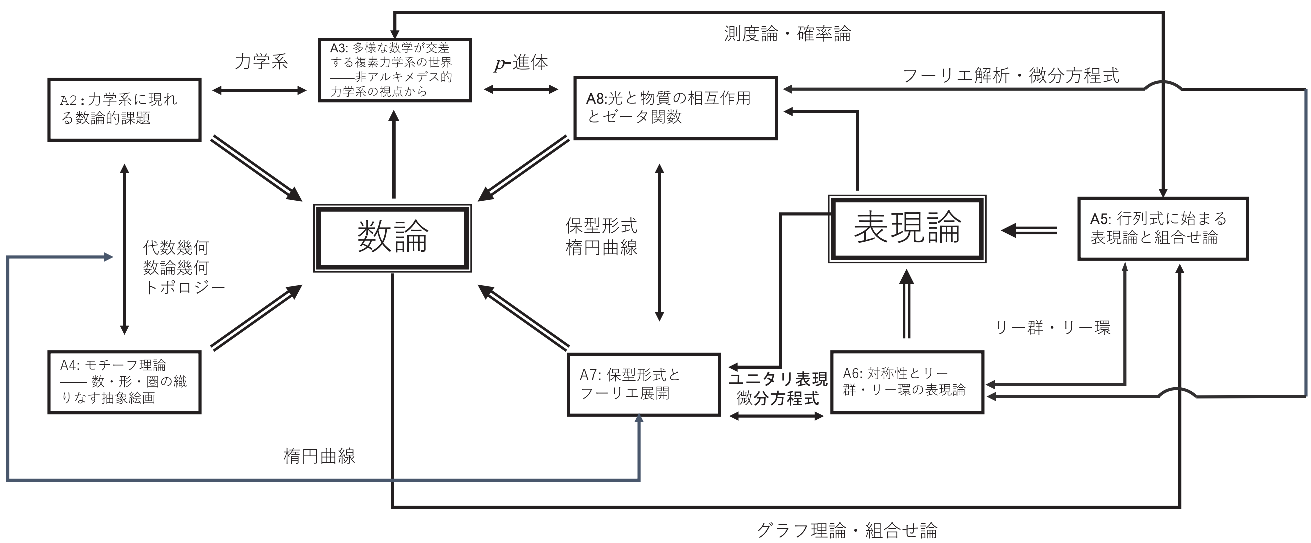


図4　本特集における数学研究の関係図：多様な数学が有機的につながっている

■代数幾何のパラダイムシフト――関数が先か，空間が先か

数学が急速に進展するとき，そこには必ず重要なパラダイムシフトが存在します．代数幾何の歴史においては「空間と関数の立場の逆転」がもっとも大きなパラダイムシフトの１つでした．

現代の数学では，幾何学的な対象を，すべて包括して「空間」と呼びます．グラフも空間の一例です．一方，関数とは空間の各点に数値を与える規則です．例えば，実数直線という空間の上には，$f(x)=x+1$ という関数が定まります．関数の値は単なる数値ですから，関数どうしの足し算，引き算，掛け算を定めることができます（割り算は，関数の値が 0 になり得る場合にはできません）．このように，足し算，引き算，掛け算を併せ持つ代数構造を「環（かん）」と呼びます．このように，空間という幾何的対象から出発して，環という代数的対象をつくり出せます．

次に，例えば，$f(x)=1/x$ という式を考えるとどうなるでしょうか．これは逆数を対応させる式ですが，実数直線全体の上の関数にはなりません．$x=0$ の逆数は存在しないためです．しかし，空間を実数直線から 0 を除いたものに取り替えれば，この空間の上では，$f(x)=1/x$ は関数になっています．つまり，$f(x)=1/x$ という関数が空間の上に住んでいるなら，その空間は 0 を含むことはできないわけです．

このように，空間を決めれば対応する環が決まり，逆に，環の様子を調べることで，空間の様子が分かる，という関係が見て取れます．このことを比喩的に表現すれば次のようになるでしょう．空間を「国」のようなものだと思えば，関数は「民」に相当します．国＝空間があれば，そこには民＝関数がいて，「＋，－，×」によって民どうしが相互作用しています．しかし，国は民が集まることによって初めて形成されます．国の様子を知りたければ，どのような民が住んでいるかを調べることが有効に違いありません．

このような観察を背景として，20世紀後半に彗星のように登場したグロタンディークは，次のような素朴かつ大胆な哲学を打ち出しました．

・哲学：すべての環は，ある空間の上の関数の集まりとみなすことができる．

つまり，空間→環という対応とは逆向きの，環→空間という対応関係が存在するというのです．これは，代数方程式に対してグラフを対応させる操作の（非常に広範な）一般化になっています．実際，方程式に対して「剰余環」という環を自然に対応させることができるのですが，この環に対応する空間を考えると，方程式のグラフが復元されます（正確には，グラフよりも豊富な情報を持つ「代数多様体」が得られます）．

グロタンディークはこの哲学を数学的に精密な理論として結実させることに成功しました．「スキーム理論」と呼ばれるこの理論は，それまでの代数幾何の枠組みを根底から書き換える壮大なもので，その基礎付けを行った著作は数千ページに及びます．また，理論の構築の過程では，20世紀に発達した圏，関手といった抽象数学が本質的に，縦横無尽に用いられます．

■数論幾何

グロタンディークがスキーム理論をつくり上げた動機は，数論への応用にありました．環のもっとも素朴な例は，整数をすべて集めた集合です．整数どうしに「＋，－，×」を行っても再び整数ですから，確かに環になっています．これを「整数環」と呼びます．整数環の性質を明らかにすることが数論の究極目標の１つです．スキーム理論により，整数環に対しても空間が自然に対応し，これを通じて数論の問題を自然に幾何学の問題に翻訳することができます．このように，スキーム理論を用いて数論を研究する分野を数論幾何と呼びます．数論幾何については，本特集記事『モチーフ理論――数・形・圏の織りなす抽象絵画』でさらに詳しく触れます．

スキーム理論を用いると，整数に限らず，情報分野で扱われる 1＋1＝0 が成り立つような数の体系（正標数の環）を含む，直感的でない数の世界においてすら，幾何を考えることが可能になります．現在では，正標数の世界の代数多様体（楕円曲線など）は情報・暗号分野において重要な役割を演じています．純粋に数論的な興味から出発し，抽象数学の力をフル活用して発展した代数幾何・数論幾何が，実社会における具体的な応用の不可欠な理論的支柱となっているという事実は驚くべきことです．

数論幾何は代数・幾何・解析と複雑に絡み合いながら成長し，現在では，数論研究の巨大な大動脈となっています．面白いことに，純粋に数学的な好奇心から発生した数論幾何は，数論とは（一見）遠く離れたさまざまな領域に転用可能な概念を生み出し，予期されていなかった応用をもたらしています．例えば，ヴェイユ予想の解決で鍵となった代数多様体の「重さ」の理論は，理論物理の最先端にあたる弦理論やミラー対称性の研究において不可欠な基盤となっています．また上述のように，フェルマー予想の証明でも重要な役割を演じる楕円曲線は，耐量子暗号の構成や認証技術をはじめとして，情報理論でも幅広く応用されています．数論幾何は（数学の歴史全体でみれば）まだ若く，現在でも新たなイノベーションが起き続けている分野です．これからも数学の内外に予期せぬ果実をもたらし続けることでしょう．

表現論と保型形式

■群の作用

表現論と聞いて数学者が真っ先に考えることは，群が何かに作用している状況です．さらに群といえば，20歳で決闘により亡くなったエヴァリスト・ガロアの名が浮かびます．「五次以上の方程式には一般的な代数解（四則演算と冪根で表示できる解）の公式がない」というアーベル-ルフィニの定理の証明を大幅に簡略・普遍化し，与えられた方程式がいつ代数的な解の表示を持つかについて，群概念の先駆けを用いて特徴付けました．いわゆるガロア理論です．ガウスによる平方剰余の相互法則を起源に，「クロネッカーの青春の夢」を実現することで代数的整数論の金字塔を打ち立てた高木貞治の類体論もガロア理論が元にあります．それはまた，今や非可換類体論に向けたラングランズ予想と呼ばれる壮大な理論体系の柱ともいえます．一方で，群の定義そのものはあっさりしており ①「積」な

る二項演算が定義されていて，それが結合法則を満たし，②単位元が存在し，③各元に逆元が存在する，というものです．

有限群でいえば，身近にある正多面体群，結晶群，行列式の定義に現れる対称群のほか，有限次元ベクトル空間Ｖ上の正則（逆行列を持つ）線型変換たちがなす一般線型群GL(V)などがあります．ルービックキューブの目をそろえるための一連の操作も，「手」が物理的な群演算を施していると考えられます．

■群の表現論

一方表現論というと，文学ですか，あるいは数学分野にそのようなものがあるのですか，と問われることがあります．20世紀初頭にドイツで生まれた芸術運動に端を発する表現主義の影響です．それは一般に，感情を作品中に反映させて表現する傾向を指していて，英語では「expressionism」です．他方，表現論は「representation theory」です．表現論（特に群の表現論）とは，群の各元をベクトル空間Ｖの線型変換として表現することでそれが作用するＶを研究する数学の一分野です．表現論が独立した研究対象となった歴史的契機は，デデキントがフロベニウスに宛てた1886年の書簡における群行列式の因数分解の問題です．有限群の指標の理論はここに始まりました．指標とは表現（行列）のトレースです．指標により表現が本質的に決まることもポイントです．また，ソフィス・リーは微分方程式に対するガロア理論の構築をねらい現在のリー環・リー群を創始する研究を行いました[4]．ただし，これらの表現は，Ｖとして無限次元空間を考察することが重要ですが，その場合には位相も考えます．しかし，現代の表現論の発展を決定的に進歩させたのは，「相対論」と「量子力学」という物理学における革命的理論と，ラングランズ予想に至る道中で飛躍的な進歩を遂げている数論研究です．技術面に限れば，群や環などの代数系に依存してやや異なりますが，表現論の目標は以下の３つに集約・大別されます．

- 素数のような基本的役割を果たす既約表現の構成と分類（もれなく重複がないリストをつくること）
- 与えられた表現を，既約表現の「和」として分解すること（困難の分割）
- 同じ表現でもさまざまなカオを持ちます（同値な表現）．そのさまざまなカオ（同値類の各元）を，例えば興味深い幾何学的対象を用いて構成すること（応用上の有益）

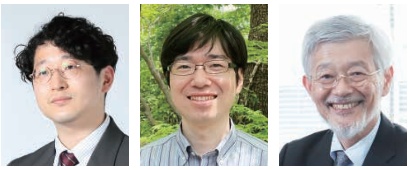
どうして単純に見える行列群のような群を難しい線型変換として表現するのか，などの疑問を持つ方もいらっしゃるでしょう．しかしそれは，むしろ逆です．大変複雑に見えるものでも，正しく解きほぐせば（分解），１つひとつは単純（易しい群の作用）だと分かり，その結果，対象の真の理解に到達できるというわけです．これらの研究には，微分方程式，関数解析，特殊関数論や組合せ論[5]，そしてガロア以来相性の良い圏論などが駆使されることになります．

■保型形式

現在では純代数的に語られることが多いラングランズ予想ですが，そのアイデアの原点はセルバーグによる非正則なアイゼンシュタイン級数の解析接続の理論とハリッシュチャンドラの壮大なリー群の表現論の研究にありました．実際，表現論は，純代数的に定式化されている数論の疑問の解決のために，それをフーリエ変換やq-級数などの解析的なものに置き換えて研究する際に果たす強固な架け橋です．そこには，連続群や離散群の自然な作用が背後にあり，それらによる不変性の記述が問題を明確化しています．例えば，フェルマーの最終定理の後，その何倍も難しいとされていた佐藤-テイト予想（の一部）が，2011年にリチャード・テイラーたちにより解決されました．20世紀の数論を牽引したラマヌジャン予想とは，楕円曲線のL-関数の零点の絶対値分布がリーマン予想の類似を満たすことでしたが，それはさらに，零点の偏角分布が$\sin^2$-分布するという，1963年に佐藤幹夫により定式化された予想です．その難しさは，フェルマー予想では一個のL-関数で収まっていた問題を，n個の対称積$(n=1,2,3,\cdots)$から定まる表現に付随するL-関数に対して解決せねばならないからでした．この解決は極めて画期的なものですが，より重大な多くの未解決部分が残されています．佐藤-テイト予想への挑戦はラングランズ予想攻略の核心にもあたり，その解決には，表現論に深くかかわる非正則な保型形式の研究の進歩が待たれています[6]．本特集で紹介される保型表現と表現論の２つの記事は，その根幹にかかわる研究です．他方，表現論と量子力学の関係は深く数論研究にも及びます．またそれは，不変式論，組合せ論や確率論・統計学の問題にも深くつながるものです．これらについても，その一端を本特集の記事の中で紹介します．

■参考文献

(1) 初田・柴藤：“数理の窓から世界を読みとく：素数・AI・生物・宇宙をつなぐ，” 岩波ジュニア新書，2021.
(2) 山崎・新井・小林・斎藤・吉田：“初等整数論 ―数論幾何への誘い―（共立講座 数学探検 6），” 共立出版，2015.
(3) https://web.archive.org/web/20080513023708/http://www.math.brown.edu/~jhs/ADSBIB.pdf
(4) 平井・山下：“表現論入門セミナー：具体例から最先端にむかって，” 日本評論社，2003.
(5) フルトン・ハリス（木本訳）：“フルトン-ハリスの表現論入門（上下），” 丸善出版，2024.
(6) コブリッツ・上田：“楕円曲線と保型形式，” 丸善出版，2012.



（左から）佐野　薫／ 宮﨑　弘安／ 若山　正人

多くの応用を生み出している数学の基礎研究の多くは，数学者の純粋な好奇心から生み出されてきました．本特集をとおして現代数学の歩みと，私たちが数学にかける想い，そして数学の発展の最前線の一端をお伝えできればと思います．

◆問い合わせ先

NTT コミュニケーション科学基礎研究所
企画担当
TEL　0774-93-5020
FAX　0774-93-5026
E-mail　cs-jousen-ml@ntt.com

URL https://https://journal.ntt.co.jp/article/27005
DOI https://doi.org/10.60249/24075002

力学系に現れる数論的課題

離散力学系の分野では，ある種の図形の変換（自己写像）が与えられたとき，その変換を反復して施すときの各点の漸近挙動を理解することが究極的な目標です．数論力学系の分野においては，特に数論的に興味を持たれる値（代数的数や p 進数）を座標に持つ点の漸近挙動が調べられています．こうしたものの研究に関連して，曲線の有理点決定問題に帰着される課題群があります．本稿では数論力学系におけるこれらの課題の問題意識について紹介します．

キーワード：#数論，#力学系，#Diophantus幾何

佐野（さの）　薫（かおる）

NTT基礎数学研究センタ

はじめに

時間経過に沿って各点がある規則に従って動いていく系のことを力学系といいます．ある多項式ないしは有理関数 f が与えられたとき，その反復合成による各点の軌道，つまり

$$z \mapsto f(z) \mapsto f\big(f(z)\big) = f^2(z) \mapsto f\Big(f\big(f(z)\big)\Big) = f^3(z) \ldots$$

という数列を考え，この反復合成の回数を離散的な時刻とみなすと，力学系が得られます．これがいつ無限大に発散するのか，いつ何かの値に収束するのか，というのは初歩的でありつつ難しい問いです．数論力学系とは，こうした力学系に現れる数論的現象を調べる分野であり，シルヴァーマンにより2000年前後に生まれた比較的新しい分野です．数論と力学系のどちら寄りに問題意識の重心を置くかによって，研究にはグラデーションがあります．本稿では数論寄りの問題意識でみた数論力学系について，特に何らかの曲線の有理点の決定問題に関連する問題群について紹介します．力学系寄りの問題意識でみた数論力学系については，本特集記事『多様な数学が交差する複素力学系の世界――非アルキメデス的力学系の視点から』で紹介します．

数論力学系の１つの大きな問題意識は，数論幾何とりわけ楕円曲線やその高次元版であるアーベル多様体の理論の，力学系での類似の辞書を埋めること，ないしはその類似を通じて，数論幾何の新たな知見を得ることにあります．

モートン－シルヴァーマン予想

楕円曲線のねじれ点とは，自分自身を（楕円曲線に定まっている加法で）何度か足すと O になるような点のことです．これは，２倍するという写像を反復して施して得られる軌道が有限集合になるような点，ということと同じことです．楕円曲線が有理数体上で定義されている場合には，このような有理点の個数が16個以下であること（より正確には，群構造のあり得るパターンの完全決定）がメイザーにより証明されています．では例えば，実数の直線上の z^2 という写像の反復ではどうでしょうか．z^2 による軌道が有限になるものは複素数の範囲では１のべき乗根たちと０です．このうち有理数（有理擬周期点）は０，１，−１の３つのみです．$z^2-\frac{3}{4}$ という写像ではどうでしょうか．この場合の有理擬周期点は実は $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}$ の４つのみです．有理擬周期点が有限個なのは，これらの写像が特殊だからなのでしょうか．実際はそうではありません．有理数係数の d 次多項式（$d \geq 2$）に対しても有理擬周期点の個数が有限個であることが証明できます．ではその個数は上で挙げたように３個，４個程度で収まるのでしょうか．軌道が有限であるだけでなく，周期的な軌道を持つ有理点（有理周期点）に制限すると，どんな周期があり得るでしょうか．それに答えるのが次の予想です．

・モートン－シルヴァーマンの一様有界性予想（の特殊な場合）：２以上の整数 d に対し定数 N_d があり．有理数係数の d 次有理式 f の有理擬周期点の個数は N_d 個以下である．

この予想は２次多項式 z^2+c（c は与えられた有理数）の場合に限っても広く未解決です．周期が１，２，３の有理周期点 z があるような c が無限にあることは比較的容易に証明できる一方，周期４，５，６の周期有理点を持つような有理数 c は存在しないことが示されています．ただし周期が６のものについてはBSD（バーチ-スウィンナートン-ダイアー）予想の仮定を必要としているのが現状です．また，abc 予想をさらに一般化した予想を仮定すれば，z^2+c は周期４以上の周期有理点を持たないことが証明されています．周期 n の有理周期点を探すということを考えたとき，勘の良い方であれば，$f_c(z)=z^2+c$ としたとき n 回反復合成を考え，$f_c^n(z)=z$ という方程式を解くというアイデアを思いつくかもしれません．より精密には，例えば $n=4$ のときには周期２の周期有理点もこれを満たしてしまいます．それを反映して，$f_c^4(z)=z$ を $f_c^2(z)=z$ で割って得られる（c，z に関する）多項式の解を考えればよいでしょう．一般の周期 n に対しても同様です．このようにして得られる多項式は n 次力学系的多項式（Dynatomic polynomial）と呼ばれます．Dynatomicというのは円分多項式（Cyclotomic polynomial）の力学系バージョンとして考えられた造語です．さて，n 次力学系的多項式は c，z に関する多項式ですが，これにより定まる図形 X_n^{dyn} は曲線になり，曲線の有理点（c，z）の有無を問う問題になります．このような問題，すなわち曲線族の有理点の有無に関する問題を読者の方々はご存じでしょう．そう，フェルマー予想です．実際上で述べた $n=4$，5，6のいずれの場合もフェルマー予想解決に至るまでに構築された，具体的

な曲線の有理点決定に関する理論をフルに使って証明されています．ただしここで注意したいのが，フェルマー予想解決の決定打となった理論は，具体的な曲線の有理点決定の各論ではないということです．フェルマー予想の非自明な有理数解を用いて，フライ曲線と呼ばれる非常に性質が良い楕円曲線が定義されます．現在では定理となっている谷山-志村予想によると，任意の楕円曲線がある保型形式に対応します．ところが，元の楕円曲線の性質の良さから，対応する保型形式の性質が良くなりすぎ，実際にはそのようなものが存在しないことが証明され矛盾し，フェルマー予想の非自明な解がないということが帰結されるのでした．

モートン－シルヴァーマンの予想についてもこの驚きの方法が適用できないかと模索するのは自然なことですが，フライ曲線を定めるような方法は全く見出されていないのが現状です．

また，楕円曲線のねじれ有理点の個数が16個以下であることはすでに紹介したとおりですが，加法が定義されたより高次元の空間（アーベル多様体）についてはどうかというと，これは二次元の場合においてすら未解決問題です．実はファクルディンにより，この予想がモートン－シルヴァーマン予想から従うことが証明されており，単に類似を辿るということを超えた意義があるわけです．

力学系的消去

モートン－シルヴァーマン予想に関連して，次のようなシチュエーションを考えてみましょう．fを次数がdの多項式とします．仮にfが擬周期有理点（軌道が有限集合であるような点）xを持っているとします．このような点は何度かfで送ると周期軌道に入ることが分かります．仮に時刻3で周期4の周期軌道に乗ったとしましょう．つまり**図1**のような，周期4の周期軌道に長さ3の“尻尾”が付いている状況です．このとき$y = f^4(x)$とするとxとyは時刻3で

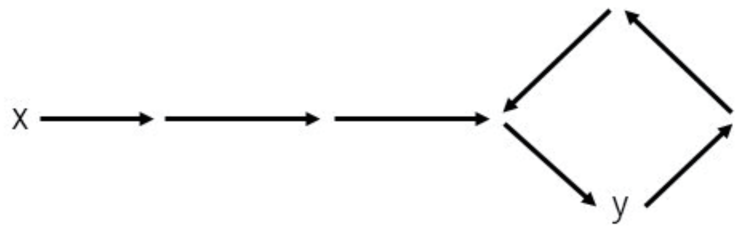


図1　擬周期軌道

初めて衝突します．つまり$f^2(x) \neq f^2(y)$および$f^3(x) = f^3(y)$が成り立つということです．一般にfを固定したとき，このような現象$f^{n-1}(x) \neq f^{n-1}(y)$かつ$f^n(x) = f^n(y)$が起こるような有理点の組（$x$, y）はどのくらいあるでしょうか．どれだけ大きなnについてもこのような（x, y）は存在するでしょうか．この問いは力学系的消去と呼ばれています．この問いに答えるためには，例えば整数$n(n \geq 1)$ごとに

$$\frac{f^n(x)-f^n(y)}{f^{n-1}(x)-f^{n-1}(y)} = 0 \qquad (1)$$

で定まる方程式の解（x, y）の有無を調べればよいでしょう．これもやはりx, yを変数とみなすと曲線の有理点決定問題になっており難しそうですが，実はこれについては2023年 ベル-松澤-サトリアーノにより，次数2以上の任意の有理写像fについて，十分大きなnをとると$f^{n-1}(x) \neq f^{n-1}(y)$かつ$f^n(x) = f^n(y)$が成り立つような有理点の組（$x$, y）が存在しないことが証明されています．また，執筆者と松澤の共同研究により，これを二次元に一般化した結果が得られているほか，チョンはさらに高次元化した結果を得ています．これらの結果は曲線の有理点決定問題ではあるものの，その証明はいずれも代数幾何やp進数を用いた解析によるものです．

こうした高次元化とは別の方向ですが，次数dを固定したとき，力学系的消去に現れるnの限界はfによらずに決まるのか，など，一様性についても興味深いところで，もしこの“一様版力学系的消去”が成り立てば，前述したような例を考えることで，擬周期軌道の尻尾の長さの限界を知ることができ，モートン－シルヴァーマン予想への貢献が見込まれます．

0の逆像

改めて楕円曲線の話に戻って，pべき倍してOになるようなねじれ点がどのくらいあるかという問題を考えてみましょう．ここでpは素数です．これはねじれ点全体の個数よりかなり少ないわけですが，もし有限個以外のpでこのようなねじれ点がO以外にないことが示せれば，それはメイザーの定理に匹敵する結果を従います．もちろん同様のことはアーベル多様体でも考えられます．さてここで，pべき倍してOになるような点とは，p倍写像を何度か施すとOになる点ということにほかなりません．このような点の存在・非存在についての問題の力学系における類似問題を先ほどの例$f_c(z) = z^2 + c$で考えてみましょう．すなわち，$f_c^n(z) = 0$となる有理数の組（c, z）と正の整数nはどのくらいあるでしょうか．これは$f_c^n(z) = 0$で定まる曲線X_n^{pre}の有理点の決定問題そのものですが，フェイバー-ハッツ-ストールによりBSD予想の仮定の下，$n \geq 4$では$c \neq -1, 0$なる有理点（c, z）が存在しないことが証明されています．X_n^{pre}の点（c, z）をX_{n-1}^{pre}の（$c, f_c(z)$）に送る写像により曲線どうしが深くかかわり合っていることは特筆すべき性質であり，楕円曲線のねじれ点を記述する曲線（モジュラー曲線）との類似点となっています．

樹状ガロア表現

曲線の有理点決定問題から少し方向を変

えて，数体の拡大に関する問題を紹介します．フェルマー予想へのクンマーのアプローチにみられるように，一般に数の世界を拡大したとき（すなわち数体を考えたとき）素因数分解の一意性の成否は非常に重要な問題です．素因数分解の一意性の成り立たない程度を記述する量として，類数というものがあります．数体が与えられたとき，その類数を計算するのは現代でも非常に難しい中心的な問題の 1 つです．

それでは，数論の重要定理である岩澤理論の類推としての数論力学系の問題をみてみましょう．多項式 f および有理数 x を固定し，その f の反復合成による逆像たちからなる樹状の点列を考えます（**図 2**）．この木に含まれる有理点の個数の問題について前述しましたが，大抵の場合は早い段階で有理数ではなくなってしまうのでした．それらを有理数体に付け加えて得られる数体を反復ガロア拡大と呼びます．反復ガロア拡大は反復回数を増やしていくと，どのように変化していくでしょうか．例えば $f(z)=z^p$ として 1 の逆像を考えてみましょう．これは 1 の p べき乗根をすべて考えることに相当し，これらをすべて有理数体に付け加えると，円分 Z_p 拡大と呼ばれるものが得られます．さて，円分 Z_p 拡大を n 段階目までで止めると数体が得られますが，岩澤理論の一部として，岩澤類数公式と呼ばれるものがあり，類数の漸近挙動が記述できます．これ自体驚くべき定理ですが，では円分 Z_p 拡大の代わりに，例えば z^2+1 による 0 の逆像を考えたときの反復ガロア拡大について，類数はどのように振る舞うでしょうか．岩澤類数公式のような，類数の漸近公式はあるでしょうか．岩澤理論においては，類体論が基本的な道具として用いられており，ガロア群（数体のある種の対称性を記述する群）が可換であることは必要不可欠な仮定です．しかし多くの場合には反復ガロア拡大のガロア群は非可換群であり，木の図形の対称性（自己同型群）の大部分を実現することが期待されています．円分 Z_p 拡大では全く逆に木の対称性のほとんどを実現しないのですが，これは非常に珍しい状況であるということです．木の対称性の多くを実現しない場合（つまり木の自己同型群の中でガロア群が無限指数である場合）には，考えている多項式 f が力学系的に何か特別な性質を持っていると考えられており，例えば力学系が自己同型を持つ場合，臨界点がすべて擬周期点である場合，複数の臨界点の軌道が交わる場合などでは実際に無限指数になることが知られています．しかしこれらで無限指数になる状況が尽くされているのかについては未解決の問題です．こうした問題を解決していくことは，岩澤理論の非可換化という大課題へのアプローチの 1 つになるでしょう．

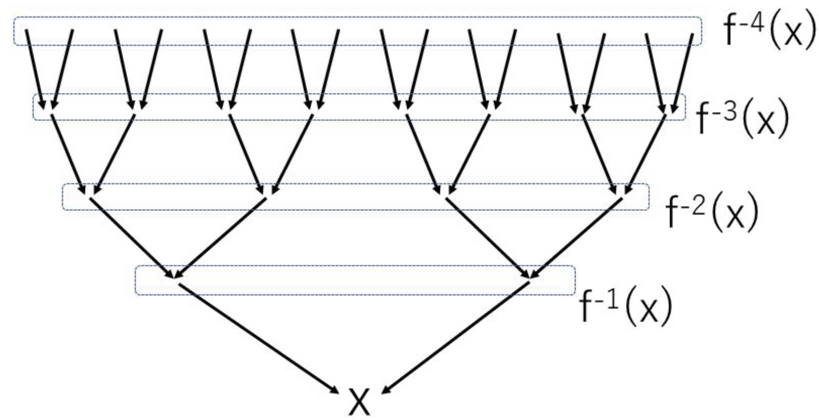


図 2　逆像の木

おわりに

多項式や有理式の反復合成から生じる数論の問題をいくつか紹介してきましたが，それらは楕円曲線やアーベル多様体の理論，岩澤理論の類似であるだけにとどまらず，複素力学系の技術の拡張や，新たな数論的な現象を明らかにしていくものです．数論力学系はまだまだ若い分野ですが，代数幾何，複素力学系，数論幾何など，さまざまな分野の研究者を巻き込み，めざましいスピードで発展しています．ぜひ，これからの研究にご期待ください．

佐野　薫

工夫なくコンピュータで扱えるのは有限桁の小数，したがって有理数です．何かのアルゴリズムを走らせて状態を推移させていくとき，それはすでに数論力学系の範疇かもしれません．読者の皆様の身近なものにも，実は数論力学系の研究対象が潜んでいるかもしれません．

◆問い合わせ先
NTTコミュニケーション科学基礎研究所
企画担当
TEL　0774-93-5020
FAX　0774-93-5026
E-mail　cs-jousen-ml＠ntt.com

URL　https://journal.ntt.co.jp/article/27007
DOI　https://doi.org/10.60249/24075003

多様な数学が交差する複素力学系の世界——非アルキメデス的力学系の視点から

複素力学系は純粋数学の一領域です．力学系理論という解析的な領域でありながら，代数学や幾何学などを含めた純粋数学における幅広い分野とのつながりの中で研究が進められてきました．特に筆者はこの複素力学系を，整数論という全く異なる分野で生み出された非アルキメデス的数と呼ばれる数の理論を用いて研究しています．本稿ではこれらの研究の概要とその魅力を紹介します．

キーワード：#力学系，#カオス，#非アルキメデス的数

色川　怜未（いろかわ　れいみ）

NTT基礎数学研究センタ

複素力学系とその展開

複素力学系とは複素係数の漸化式が定める離散力学系の漸近挙動を調べる分野です．例えば漸化式 $x_{n+1}=x_n^2+c$（c は複素数）の $n\to\infty$ での挙動は，漸化式自体の見た目の単純さとは裏腹にマンデルブロ集合（**図 1**）に代表される複雑で豊かな構造と密接にかかわっています．近年は特に空間やパラメータの次元を増やした高次元の力学系に関する研究が盛んです．それらの研究で興味深いことは，実力学系や数論的力学系，非アルキメデス的力学系，代数幾何学，アラケロフ幾何学などの他の研究分野とのかかわりの中で研究が進められている，ということでしょう．これらの分野はそれぞれ研究対象も手法も大きく異なりますが，ある分野が進展することで複素力学系に関する研究が大きく進展したり，逆に複素力学系の研究成果を用いて他分野の研究がなされたりしています．本稿では複素力学系という分野の大まかな紹介の後に，例として筆者の専門である非アルキメデス的力学系について，その概説と複素力学系との関係を紹介します．

マンデルブロ集合とジュリア集合

前述した漸化式 $x_{n+1}=x_n^2+c$ を考えます．もっとも単純なケースは $c=0$ の場合，つまり $x_{n+1}=x_n^2$ という漸化式が定める力学系でしょう．この漸化式は一般項 $x_n=x_0^{2^n}$ を持つので，漸近挙動は初期値 x_0 の絶対値によって次のように場合分けできます．

(a) $|x_0|<1$ の場合：x_n は 0 に収束する；

(b) $|x_0|>1$ の場合：x_n は発散する；

(c) $|x_0|=1$ の場合：任意の n に対して $|x_n|=1$.

このとき，(a) や (c) の場合は初期値の微小な変動に対して漸近挙動が安定していることが分かります．つまり，$|x_0|<1$（あるいは $|x_0|>1$）を変えない範囲で x_0 の値を動かしたとしても，最終的に 0 に収束（あるいは発散）します．一方で (b) では初期値の微小変動で漸近挙動が大きく変わってしまいます．このように漸近挙動が不安定になる点の集合はジュリア集合と呼ばれています．この場合は複素平面上で $|x|=1$ を満たす点の集合，つまり**図 2** にあるような単位円周です．しかし，すべてのジュリア集合が単位円周のように単純な形をしているわけではありません．例えば $c=-1$，つまり漸化式 $x_{n+1}=x_n^2-1$ に対応するジュリア集合を描画すると**図 3** のようになります．このジュリア集合は，その形状から「バシリカ[*1]」と呼ばれています．また，$c=-0.123+0.745i$ とすれば**図 4** の「ウサギ」を，$c=-1.75488$ とすれば**図 5** の「飛行機」を得ます．パラメータ c を変えるだけで多様な形のジュリア集合を得ることができるのが見てとれます．

冒頭のマンデルブロ集合はこのジュリア集合の「形」を統制しているものです．マンデルブロ集合は漸化式 $x_{n+1}=x_n^2+c$ における，パラメータ空間（変数 c の空間）

＊1　バシリカ（basilica）：建築様式の名称です．

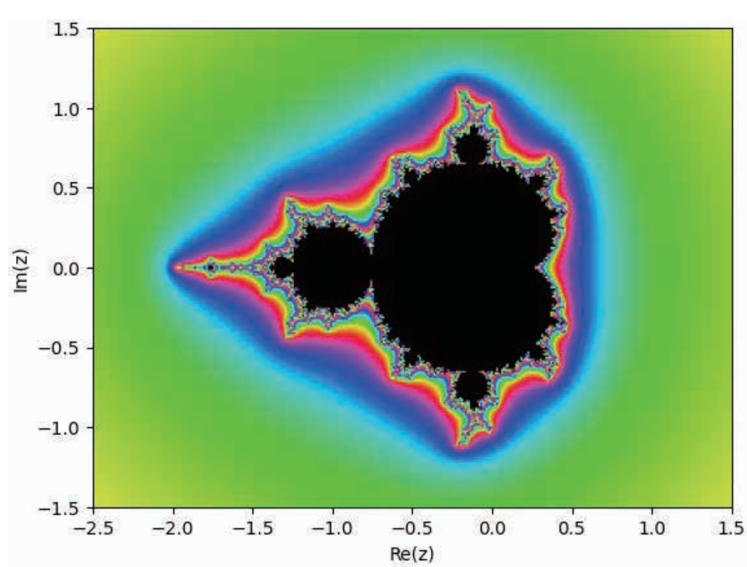


図 1　マンデルブロ集合

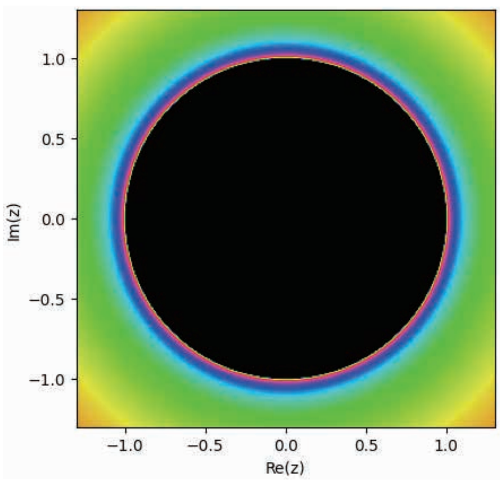


図 2　c= 0 でのジュリア集合

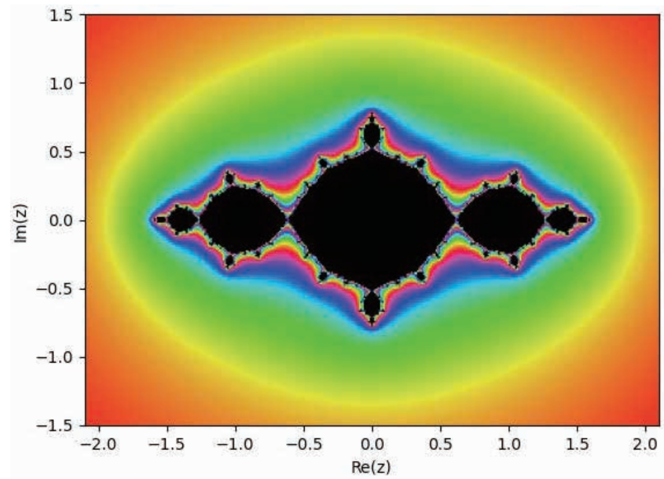


図 3　c=– 1 でのジュリア集合「バシリカ」

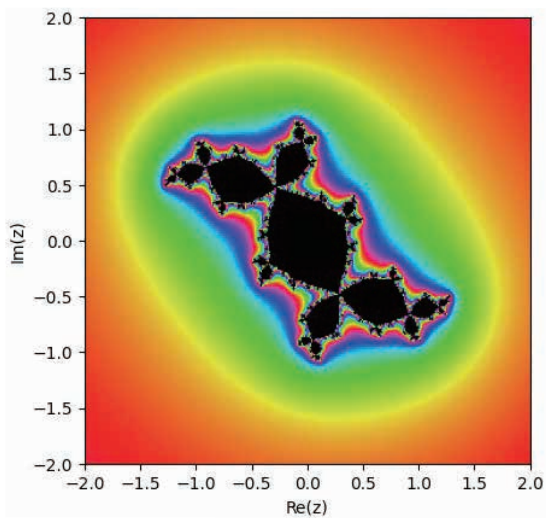


図 4　c=– 0.123 + 0.745i でのジュリア集合「ウサギ」

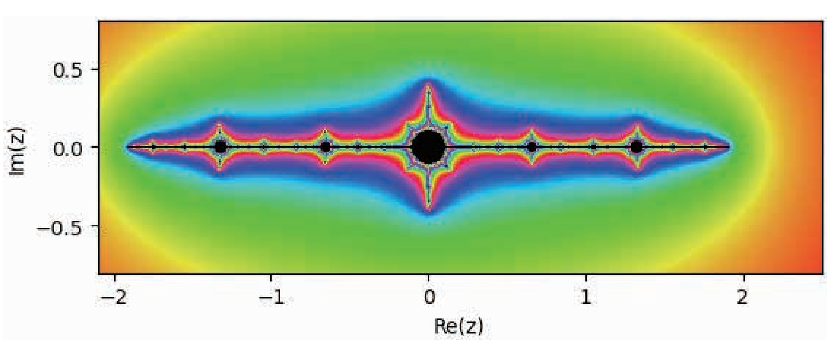


図 5　c=-1.75488でのジュリア集合「飛行機」

の部分集合で，その内側をいくつもの部屋に分ける複雑な形をしています．複素平面から点cを選ぶごとに漸化式$x_{n+1}=x_n^2+c$が，さらにそこからそのジュリア集合が対応するため，パラメータcを連続的に動かせばそれに応じてジュリア集合が変形していくことが予想されます．実際，同じ部屋の中でパラメータを動かす限りではジュリア集合は連続的に変形します．つまり，現れるジュリア集合の形もよく似たものになります．しかし，マンデルブロ集合をまたぐとそれが全く異なる形に変わってしまうのです．例えば$c=0$は中心にあるカージオイド状の領域（もっとも大きい領域）の内部，$c=-1$（バシリカ）はその左側の円状の領域の内部，また$c=-0.123+0.745i$（ウサギ）はカージオイドの上部に接している円状領域内の点であり，それぞれマンデルブロ集合によって分割された異なる領域に存在しています．各領域の内部ではそれぞれの形を保ったままで変形しますが，一度領域をまたぐとそれがただの円状の集合に変わってしまったり，全く別の形のジュリア集合が現れたりします．このような現象（パラメータの微小変形でジュリア集合の形が大きく変わること）を分岐と呼び，分岐が起きるパラメータを分岐点と呼びます．マンデルブロ集合とは漸化式$x_{n+1}=x_n^2+c$のパラメータcに関する分岐点全体の集合のことです．ジュリア集合がパラメータを固定した際の初期値に関する安定性の概念だったのに対し，マンデルブロ集合（より一般に分岐点の集合）は力学系そのものをパラメータで変動した際の系の安定性にかかわる概念である，と理解することができます．

ジュリア集合やマンデルブロ集合は非常に豊かな性質を有しています．例えばバシリカや飛行機などのジュリア集合は複雑ながらどこか規則的な形状をしています*2．実はマンデルブロ集合も同様の性質を持ち，**図 6** のように図を拡大することで何らかの

*2 このような性質を持つ図形はフラクタルと呼ばれています．

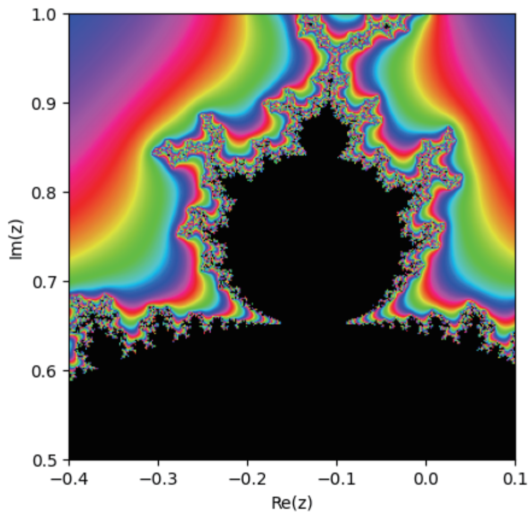


図 6　マンデルブロ集合の実部 [– 0.4,0.1] 虚部 [0.5,1.0] を拡大したもの

規則が見てとれます．また，あるパラメータの周辺を拡大するとそのパラメータに対応するジュリア集合と同じ形が現れることも知られています．ジュリア集合やマンデルブロ集合の幾何学的性質は興味深い一方で非常に難しく，例えばマンデルブロ集合の局所連結性と呼ばれる性質は今なお未解決の問題です．

漸化式やパラメータの取り方を変えても同様にジュリア集合や分岐点を考えることができます．3 次以上の多項式を考える場合パラメータ空間は高次元になり得ますし，漸化式そのものを高次元にすることもできます．例えばエノン写像と呼ばれる写像の定める力学系は，a, bをパラメータとして$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n^2 - ax_n + by_n, x_n)$という形をした 2 変数の力学系です．元々は気候をモデル化したローレンツ方程式と呼ばれる微分方程式が生み出す力学系のカオス現象を解析するためにエノンによって考察された実数の空間での力学系ですが，現在は複素力学系分野でも盛んに研究されています．

非アルキメデス的数とその上の力学系

複素力学系が複素数の空間における力学系理論であったのと同じように，非アルキメデス的力学系とは「非アルキメデス的数」の空間における力学系理論です．ただし非アルキメデス的数とはさまざまな種類の数を総合した呼び方で，非アルキメデス的数と呼ばれる数があるわけではありません．もっとも典型的な非アルキメデス的数はp-進数でしょう．p-進数の名前に現れるpは素数です．「実数」や「複素数」と並列になるのは「2 - 進数」「3 - 進数」「5 - 進数」などの数で，これらは皆似た性質（非アルキメデス性）を持っており，まとめて非アルキメデス数と呼ばれているのです．実際にはp-進数だけではなく後で紹介するローラン級数などもその一種です．ここではまず 2 - 進数を例に非アルキメデス的数の性質をみていきましょう．

少々突飛な話ですが，正の整数に普通の距離とは違う 2 - 進距離と呼ばれる距離を考えてみます．この距離は，「2 つの数の差が 2 で割り切れる回数が多ければ多いほど近い」というルールで与えられます．例えば，2 と 4 と 8 という 3 つの数を考えてみると，普通の距離の感覚では 2 と 4 がもっとも近く，次に 4 と 8 が，そして 2 と 8 はもっとも遠い，ということになるはずです．しかし，上のルールに従って考えると，$4-2=2=2^1$, $8-4=4=2^2$, $8-2=6=2^1\times 3$と表せるので，差が 2 で割り切れる回数は 4 と 8 がもっとも多い 2 回，そして 2 と 4，2 と 8 が共に 1 回です．つまり，2 - 進距離では 4 と 8 がもっとも近く，2 と 4，2 と 8 の間の距離は同じ，ということになります．

この距離は実は自然数の 2 - 進展開（バイナリ表示）と大きく関係しています．上に挙げた 3 種類の数を 2 - 進展開してみると，$2=(10)_2$, $4=(100)_2$, $8=(1000)_2$となります．この 2 - 進展開を右から見ると 2 と4, 2 と 8 は共に最初の 1 桁のみが一致している一方， 4 と 8 は最初の 2 桁が一致しています．実は，2 - 進距離は「2 - 進展開を右から見た際に一致している桁数が多ければ多いほど近い」という距離[＊3]です．これは 2 - 進展開の意味と 2 - 進距離の定義とを比べることで分かります．今後はaとbの間の 2 - 進距離を $d_2(a, b)$ と書き表すことにします．

ここで，左に無限に続く 2 - 進展開$(\cdots 111)_2$を考えてみましょう．この数は，$(1)_2$, $(11)_2$, $(111)_2$,…の極限です．十進法で書き表すと1, 3, 7,…であり発散するようにみえるこの数列は，実は 2 - 進距離では－ 1 に収束します．実際，この数列に 1 を足すと$(10)_2$, $(100)_2$, $(1000)_2$,…という数列を得ますが，この数列の極限は$(\cdots 000)_2$，つまり 0 です．$(\cdots 111)_2$に 1 を足すと 0 になるわけですから，$(\cdots 111)_2$ は－ 1 と一致する，ということになります．

一方で，実数のときと同様に小数を考えてみると，2 - 進展開では小数点以下は 2^{-1}の位，2^{-2}の位，2^{-3}の位と続きますが，2 - 進距離を拡張するためこれらをそれぞれ 2 で－1 回，－2 回，－3 回割り切れるとみなします．このとき 2 - 進絶対値（0 との間の 2 - 進距離）は桁が右に増えれば増えるほど大きくなるので，右側に無限に続く 2 - 進展開の列は 2 - 進距離では発散します．左側には有限，右側には無限に続く数を考える実数とは真逆の現象が起きていることが観察できます．

2 - 進数とは，左側には無限に，右側には有限に続く 2 - 進展開で書ける数のことです．上で定義した $d_2(a, b)$ を敷衍し距離や収束の概念が定義できます．実は 2 - 進数の集合は上で考えた負の数だけでなく有理数すべてを含み，実数とは似て異なる性質を持っています．特に重要なのは任意の 2 - 進数a, b, cに対して$d_2(a+b, c) \leq \max(d_2(a, c), d_2(b, c))$という不等式（強三角不等式）が成り立つことです．

＊3　具体的にははじめのn桁が一致しているときに距離を2^{-n}である，と定めることが多いです．

a, b, cに正の実数を当てはめてみると分かるように，この不等式は実数の距離では成立せず（代わりに弱い形の三角不等式 $d(a+b,c) \le d(a,c)+d(b,c)$ が成り立つ），これが実数や複素数との間に大きな違いを生み出しています．いくつかの例をもってこの違いをみてみましょう．

まず，実数と2-進数の「形」の違いをみます．実数は数直線の上に並んだ数だとみなすことができますが，2-進数はどんな形だと考えるのが妥当でしょうか？ そのヒントは2-進展開にあります．簡単のため小数を持たない2-進展開だけを考え，2-進展開を木で表すことを考えます．この木は1つの頂点から始まり，1の位の数が0か1かによって二分され，その先の頂点でまた2の位の数による二分があり，さらに4の位の数に応じて……と，2-進展開の桁に対応するだけの頂点と，そこから下方向に伸びる枝とによって**図7**のようにルート無限木をつくることができます．小数を持たない2-進数はすべて，この無限木の極限と対応しています．小数を持つ場合は1/2の位，1/4の位に応じて1の位に対応する頂点の上に新しい頂点を付け加えていくことで表現できます．2-進数の「形」はこの無限木，あるいはその極限であるとみなせます．実際，二分木が2-進展開を表し，2-進距離が「2-進展開が一致しているほど近い」という距離であったことを考慮すると，二分木で共有する枝の深さが2-進距離と対応していることが観察できます．

次に2-進数の空間での力学系をみてみましょう．2-進数の空間の上の力学系は前述のものとは大きく異なります．漸化式 $x_{n+1} = x_n^2$ では，漸化式が一般項 $x_n = x_0^{2^n}$ を持ち，漸近挙動を(a)-(c)の三通りに場合分けできるところまでは同じですが，「(b)の場合に漸近挙動が不安定になる」は2-進数の場合正しくありません．これを詳しくみるため，絶対値が1である（$d_2(x_0, 0) = 1$ を満たす）数 x_0 を考えてみます．この x_0 を絶対値が1よりも小さな数 ε で変動させると，得られる数 $x_0 + \varepsilon$ の絶対値は強三角不等式より $d_2(x_0+\varepsilon, 0) \le \max(d_2(x_0, 0), d_2(\varepsilon, 0)) \le 1$ を満たします．つまり(c)の状態にはなり得ません．実は ε の絶対値が1よりも真に小さいとき，$x_0 + \varepsilon$ の絶対値はちょうど1になる，つまり(a)の状態にもならないことが強三角不等式のみから証明できます．つまり，2-進距離での微小変形は(b)の条件を崩さないのです．実は2-進数の空間の上での漸化式 $x_{n+1} = x_n^2$ はジュリア集合を持ちません．非アルキメデス性が力学系の振る舞いに大きな影響を与えていることが見てとれると思います．

少し話を戻しますが，p-進数とは上の議論での2-進展開を3-進展開，5-進展開など他の素数に置き換えて得られる数のことです．すべて上述の強三角不等式を満たし似た性質を持つものの，素数を変えるごとに得られる距離はすべて異なり，p-進数は素数の数だけ存在します．そして上で触れたとおり，強三角不等式によって力学系もまた実数や複素数の上の力学系とは異なる様相を呈します．これらは一見奇妙で非直感的に思えるかもしれませんが，整数論においてはもっとも基本的かつ重要なツールの1つといっても過言ではなく，例えばフェルマーの最終定理の証明でも用いられています．

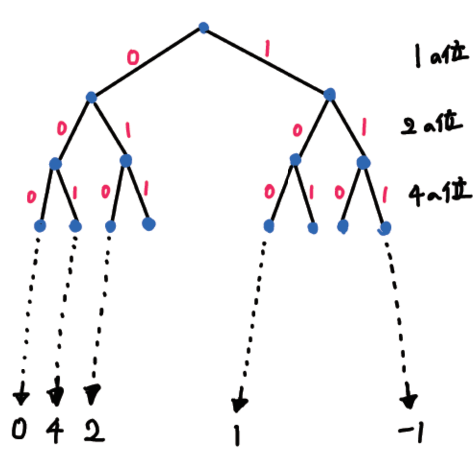


図7　二分木による2進展開の表現

非アルキメデス的力学系とハイブリッド力学系

最後に複素力学系における非アルキメデス的力学系の応用について紹介します．ここでは例として，t でパラメータ付けされた漸化式 $x_{n+1} = t x_n^2$ を考えます．この漸化式は前述のものとは異なり，$t = 0$ のとき $x_n = 0$ となってしまいます．しかし $t \neq 0$ を保つ範囲ではこの漸化式は非自明な力学系を定めており，$t = 0$ の周りで何か大きな変化が起きていることが見てとれます．このような現象を数学では退化と呼んでいます．同じ形の漸化式でありながら力学系の漸近挙動が変わってしまう分岐に対し，漸化式の形そのものが大きく変わってしまうのが退化です．退化現象はパラメータ空間のコンパクト化と呼ばれる理論と関係している力学系の重要な問題の1つで，この退化現象を非アルキメデス的力学系によって理解するために用いられるのがハイブリッド空間上の力学系（ハイブリッド力学系）理論です．ハイブリッド空間はブックサム，ファーブル，ジョンソンの3名の数学者によって考案され，元々は代数幾何学の研究のために生み出されました(1)が，その後ファーブルによって力学系の退化の研究へと輸入されました．この研究で用いられる非アルキメデス数は上で考えていたp-進数ではなく，（一次元の）複素ローラン級数と呼ばれる数です．複素ローラン級数とは，t を変数とする有限個の負冪を許した複素係数の級数 $\sum_{n=-m}^{\infty} c_n t^n$ のことです．収束半径などの条件はないため，c_nの値によっては原点の周りの有理型関数を定義しない形式的な級数ですが，原点の周辺で定義される有理型関数を自然に含んでいます．「左側（負冪）には有限に，右側には無限に続く数の列」という意味で2-進展開と似ていることが観察できます．実際，2つの級数 $\sum_{n=-m}^{\infty} c_n t^n$ と $\sum_{n=-m}^{\infty} c'_n t^n$ について，$c_n = c'_n$ が任意の $n \le n_0$ まで成立

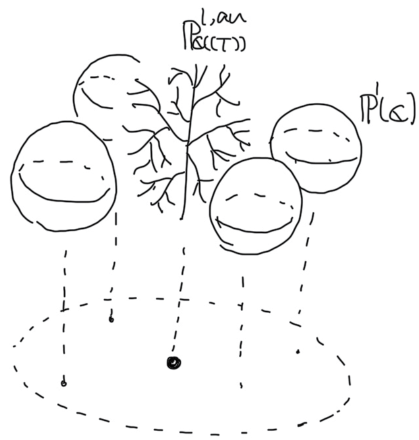


図8　ハイブリッド空間の描像

する（「t-進展開が t^{n_0} の位まで一致する」）ときにこの2つの級数の距離を e^{-n_0} である，と定めることで複素ローラン級数は非アルキメデス的数になります．このとき，t を複素ローラン級数であるとみなすことで，漸化式 $x_{n+1}=tx_n$ を複素ローラン級数の空間の力学系だとみなすことができます．ハイブリッド力学系とは，大まかにいえばこの複素ローラン級数の力学系と元々の複素力学系の間の関係を記述するものです．

ハイブリッド空間は**図8**のような形をしています．複素数 t でパラメータ付けされた空間で，$t\neq 0$ を満たす限り複素数の空間を与えるのですが，$t=0$ では複素ローラン級数の空間を与えます．つまり，複素数の空間が複素ローラン級数の空間に「退化」しているのです．ここで複素ローラン級数の空間として考えているのは実際にはベルコヴィッチ空間と呼ばれるもので，内実は非常に難解であるため割愛しますが，大雑把には前述した木の全体を考えたような空間です．極限には非アルキメデス的数（ここでは複素ローラン級数）が現れるので，漸化式に級数を代入するごとに極限の点たちが漸化式に従って動き，それに合わせるかたちで内部の木も動く，というイメージを持っていれば十分です．この木構造を持つ複素ローラン級数の空間が，複素数の空間の退化の「極限」だとみなせる，というのがハイブリッド空間の大まかな描像です．

このような空間を考えることにはさまざまな理由がありますが，1つには数学者の自然なものの見方が関係しています．漸化式 $x_{n+1}=tx_n^2$ は $t=0$ で退化し，ただの定数になってしまいますが，これは「誤った」空間で漸化式を見ているせいでそのようなおかしな現象が起きているのだ，と考えるのです．つまりおかしな現象が起きないような「正しい」空間の上で漸化式を見ればよいのです．ハイブリッド空間はその答えの1つで，この場合「正しい」極限は上で考えた複素ローラン級数の上の力学系である，ということになります．

ファーブルは t でパラメータ付けされていて $t=0$ で退化する1変数の力学系において，t を固定するごとに定まるジュリア集合が $t\to 0$ で複素ローラン級数上の力学系のジュリア集合にある意味で収束することを証明しました[2]＊4．また，筆者の論文[3]では同様の事実がエノン写像の力学系でも成立することを証明しており，また，他のさまざまな複素力学系の退化でも同様の現象が起きることが期待されます．複素数とは大きく異なっているようにみえる非アルキメデス的数ですが，実は複素力学系の退化を統一的なかたちで記述する重要な対象なのです．

おわりに

数学の分野の名前は研究技法を示している場合と研究対象を示している場合とがありますが，「複素力学系」は研究対象を示す名称です．複素数の空間の上に定められた力学系を対象として，それぞれの研究者が好きな道具を用いてさまざまな角度から研究を進めています．本稿ではその一例として非アルキメデス的力学系を用いた研究の方向性を紹介しましたが，ほかにもさまざまなアプローチによって多くの興味深い定理が日夜証明されています．本稿を通じてその面白さが少しでも伝われば幸いです．

＊4　ファーブルが参考文献(2)で実際に証明したのはn次元の射影空間と呼ばれる空間の上の力学系における結果ですが，詳細は割愛します．

■参考文献
(1) S. Boucksom and M. Jonsson：“Tropical and non-Archimedean limits of degenerating families of volume forms,” JEP, Vol. 4, pp. 87-139, 2017.
(2) C. Favre：“DEGENERATION OF ENDOMORPHISMS OF THE COMPLEX PROJECTIVE SPACE IN THE HYBRID SPACE,” JIMJ, Vol. 19, No. 4, pp. 1141-1183, 2020.
(3) https://arxiv.org/abs/2212.10851

特集

色川　怜未

NTT基礎数学研究センタでの研究に興味を持ってくださり大変光栄に思います．なるべく純粋数学を学んだことのない方にも魅力がお伝えできるよう努力しましたので，楽しく読んでいただけたら幸いです．

◆問い合わせ先
NTTコミュニケーション科学基礎研究所
企画担当
TEL 0774-93-5020
FAX 0774-93-5026
E-mail　cs-jousen-ml@ntt.com

URL　https://journal.ntt.co.jp/article/27009
DOI　https://doi.org/10.60249/24075004

モチーフ理論――数・形・圏の織りなす抽象絵画

数論幾何では，数論の問題を代数多様体という図形（幾何的対象）の問題に変換して研究します．代数多様体の情報は，コホモロジーを用いれば線形代数的なデータとして抽出できます．抽出する情報に応じて多様な種類のコホモロジーがつくられていますが，それらは「モチーフ」という普遍的な対象により背後で結び付けられていると考えられています．本稿ではモチーフ理論の概要と，執筆者らによるモチーフ理論の一般化の試みについて解説します．

キーワード：#数論幾何，#コホモロジー，#モチーフ

宮﨑　弘安（みやざき　ひろやす）

NTT基礎数学研究センタ

モチーフとは

数学ではしばしば，一見全く異なる現象・対象が驚くべき結び付きを示します．単なる奇跡のようにみえるこの結び付きの背後には，時として未知の数学的構造が隠されています．モチーフは，数論幾何に現れるさまざまな「コホモロジー」の背後に存在すると期待される数学的構造です．筆者は共同研究者たちとともに，より理想的なモチーフの理論を求めて研究を続けてきました．

数 論 幾 何

数論幾何の枠組みを用いると，数論の研究の多くは「代数多様体」という幾何的な対象の研究に置き換えることができます．代数多様体の素朴な例は方程式のグラフです．例えば，$y=x^2$のグラフとして現れる放物線は代数多様体です．方程式の変数が少ない場合，代数多様体は「目に見え」ます．しかし，変数が増えると代数多様体は高次元になり，私たちの目には見えなくなります．また，次元が低い場合でも，構造が複雑な代数多様体を「目で見て」研究することには限界があります．

不変量――カタチを「量」とみなすには

図形を「目で見て」調べることが難しい場合，「不変量」を用いることが有効です．不変量は図形の特徴を「量」として表したものです．例えば，曲面の重要な不変量の例として穴の個数（**図 1**）があります（穴の個数は「種数」とも呼ばれます）．もちろん，種数は曲面の特徴の一部に過ぎませんが，次の非常に重要な性質を持ちます．

- 定理：曲面を連続的に変形しても種数（穴の個数）は不変である．

曲面をやわらかいゴムとみなして（破らないように）変形することを「連続変形する」と言います．この定理の応用として，図 1 (a)を図 1 (b)に連続変形できるかどうか，という問題を考えましょう．図 1 (a)の種数は 2，図 1 (b)の種数は 3 です．一方，定理により，図 1 (a)をどのように連続的に変形しても種数は 2 のままで，決して 3 にはなりませんから，図 1 (a)は図 1 (b)に連続変形できないことが分かります．

この例で扱った図形の構造はシンプルなので，穴の個数が連続変形で変わらないことは直感的に明らかかもしれません．しかし，穴の数が増えたらどうでしょう．1 兆個の穴を持つ曲面があるとき，それをどんなに変形しても穴の数が増えたり減ったりしない，という事実は直感的に明らかでしょうか（少なくとも筆者は 1 兆個の穴を持つ図形を全くイメージできません）．このような「直感の及ばない」ケースにおいても決して変化しないと数学的に証明されているところが，種数の素晴らしい点です．


(a)　種数2の曲面


(b)　種数3の曲面

図 1　不変量の例

見えない図形を「見る」には

前述の例では，私たちは種数を「目で見て数え」ました．このままでは「見えない」図形の研究には役立ちそうにありません．そこで，種数を計算する別の方法を考えてみましょう．種数は連続変形で変わりませんから，曲面を**図 2** のような多面体に変形してみましょう．このとき，次の驚くべき定理が成り立ちます．

- 多面体定理：穴が g 個の多面体に対し「(頂点の数) − (辺の数) + (面の数) $= 2-2g$」が成り立つ．

左辺の「(頂点の数) − (辺の数) + (面の数)」を多面体の「オイラー標数」と呼びます．一方，g は曲面の種数です（種数=genusの頭文字をとっています）．先ほどの多面体分割を例にとると，頂点，辺，面の個数は，それぞれ24個，48本，24個です．一方，種数は $g=1$ です．これを定理

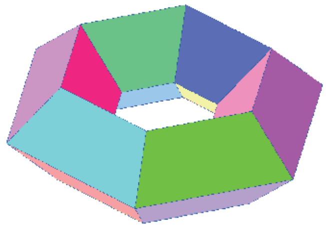


図２　多面体の例―種数１の曲面の多面体分割

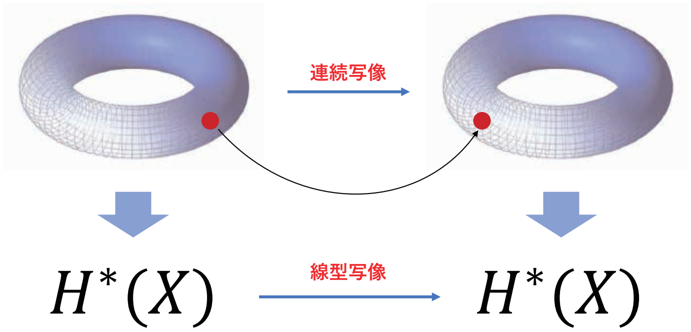


図３　コホモロジーの関手性

の式に代入すると，両辺はどちらも０となり，確かに一致します．

この例の場合，私たちは「図形の全体を外側から見て」いるので，穴の数がすぐに分かります．しかし，私たちがこの図形の表面に住んでいるとすると，穴の数を直接数えることは難しいでしょう．それでも多面体定理を使えば，図形の表面を這い回って多面体分割し，頂点・辺・面の個数を数え上げさえすれば，穴の数が計算できるのです．

この方法を発展させると高次元の図形の情報もとらえることができます．多面体は頂点・辺・面という「部品」からなります．この部品は「セル」とも呼ばれます．一般に，n 次元の円盤に連続的に変形できる図形を「n 次元セル」と呼びます．「頂点」は０次元の円盤（点）ですから０次元セルです．同様に，辺は１次元のセル，面は２次元のセルです（多面体の面は角張っていますが，円盤に連続変形できます）．セルを組み合わせてできる図形を「セル複体[*1]」と呼びます（多面体は２次元のセル複体です）．曲面を多面体に連続変形できるように，高次元の図形の多くはセル複体に変形できます[*2]．そして，そこに現れるセルの個数やセルどうしのつながり方を調べれば，高次元の「見えない図形」の情報が得られます．

コホモロジー

多面体定理に現れるオイラー標数は，セル複体に現れる各次元のセルの個数だけに依存しており，セルどうしの「つながり方」の情報は使っていません．つながり方の情報も加味すると，オイラー標数を大幅に改良した「セル・コホモロジー[*3]」が得られます．オイラー標数は図形に対し「数値」を対応させる不変量ですが，セル・コホモロジーは図形に対し「線型空間[*4]」を対応させます．

以下では，調べたい図形を X という文字で表し，X の次元を d と書きましょう．図形 X をセル複体に分割すると０次元，１次元，……，d 次元の，合計 $d+1$ 種類のセルが現れます．セル・コホモロジーは，セル複体に現れるセルの種類に対応して $d+1$ 個の線型空間の集まり

$$H^0(X), H^1(X), H^2(X), \dots, H^d(X)$$

として与えられます．毎回これを書くのは大変なので，以下ではこの集まりを $H^*(X)$ と略記しましょう．次元が２，つまり曲面の場合，セル・コホモロジーは $H^0(X), H^1(X), H^2(X)$ という３つの線型空間からなります．線型空間からは「次元」という数値を抽出できますが，多面体定理に現れるオイラー標数は，この３つの線型空間の次元の交代和[*5]に一致します．このように，セル・コホモロジーの次元にはオイラー標数の情報が含まれています．

コホモロジーの関手性

セル・コホモロジーからさらに情報を取り出すためには「連続写像」を考えることが有効です（**図３**）．セル・コホモロジーは，連続写像[*6] $X \to Y$ を逆向きの線型写像[*7] $H^*(Y) \to H^*(X)$ に対応させます．この性質を「関手性」と言います．一般に，「対象」に「写像（射）」の情報を付け加えたものを圏と呼び，圏の対象・射を別の圏の対象・射に写す対応規則を関手と呼びます．

関手性を用いると，連続写像からデータを山ほど取り出せます．実際，どのような線型写像であっても，線型空間の基底を固定すれば行列として表せます．行列はタテヨコに数値を並べた単なる表ですから，これ自体が数値的データにほかなりません．また，行列の基本変形・行列式・固有値の計算といった線形代数の手法を駆使すれば，行列の本質的な情報を抽出することもできます．

また，関手性は図形の対称性の研究にも役立ちます．図形の対称性とは，数学的には群の連続的な作用のことです．群の連続

＊１　セル複体：胞体複体ともいいます．
＊２　セル複体に分割できる図形（位相空間）をCW複体といいます．応用上現れる位相空間の多くはCW複体です．
＊３　セル・コホモロジー：胞体コホモロジーとも呼ばれます．セル複体に分割できない空間にも適用可能な，より一般化されたコホモロジー理論として「特異コホモロジー」があります．
＊４　線型空間：「加法・減法・スカラー倍」が適切に定まっている集合のこと．どんな線型空間も，基底を固定することで，いくつかの数値の組（数ベクトル）の集まりとして表示できます．
＊５　交代和：番号付けられた数値を，1つ番号が進むごとに符号を変えて足し合わせること．この例の場合，$H^0(X), H^1(X), H^2(X)$ の次元をそれぞれ d^0, d^1, d^2 とすれば，交代和は $d^0-d^1+d^2$ のこと．
＊６　連続写像：図形（位相空間）の間の写像 $f(x)$ が連続写像であるとは，定義域の点 x をわずかに変化させたとき，像 $f(x)$ の変化もわずかであること．
＊７　逆向きの線型写像：今回の主役はコホモロジーなので扱いませんが，逆向きでないバージョンとしてセル・ホモロジーというものもあります．ホモロジーとコホモロジーは双対性によって結び付いています．

作用が与えられると，群の要素 g ごとに連続写像 $X \to X$ が得られ，関手性から線型写像 $H^*(X) \to H^*(X)$ が導かれます．これは群の線型空間への作用，つまり群の表現を与えていることになります．

数論幾何のコホモロジー

さて，話を数論幾何に戻しましょう．数論幾何の目標は代数多様体，すなわち方程式のグラフの性質を調べることです．実数解・複素数解のグラフは連続的な図形の構造を持つため，セル・コホモロジーを使って情報を引き出すことができます．しかし，数論の本丸は整数解や有理数解といった「不連続」な数の研究です．こうした数の範囲のグラフは不連続ですから，図形の連続的な性質をとらえることに特化したセル・コホモロジーでは歯が立ちません．

この困難を乗り越えるため，数論幾何の創始者であるグロタンディークは「エタール・コホモロジー」を生み出しました．エタール・コホモロジーもまた代数多様体を線型空間に変換する不変量で，セル・コホモロジーと同様の関手性を持ちます（ただし，連続写像は「代数多様体の射」に置き換わります）．セル・コホモロジーの理論では，図形をセルという小さな（局所的な）ピースに分割し，そのつながりの情報から大域的な情報をとらえます．エタール・コホモロジーもやはり，図形や空間をいったん「局所的」なものに分解し，そのつながりの情報から「大域的」な性質を引き出します．そのために用いられるのが「層」の概念です．層は，先ほども出てきた圏と関手の理論を用いて定義される概念で，セル・コホモロジーの構成と比べると非常に抽象的で，直感的理解が難しく，理論も複雑になりがちであるという難点を持ちます．しかし，その抽象性のおかげで，通常の意味では不連続な空間の上にも疑似的に「連続性」「局所」「大域」のような幾何的な概念に意味を持たせることが可能になり，数論的な問題にも役に立つコホモロジーを生み出すことができます．

エタール・コホモロジーの理論は抽象的で複雑ですが，その分非常に強力です．リーマン予想の類似であるヴェイユ予想がエタール・コホモロジーを用いてドリーニュにより解決されたことを皮切りに，数論幾何にさまざまな応用を生み出し続けています．エタール・コホモロジーなくしては，数論幾何は成立し得なかったとさえいえるかもしれません．実際，フェルマー予想の解決にも，エタール・コホモロジーは不可欠な道具として用いられています．

現代数学は，層をはじめとする数多くの新たな概念をつくり出してきましたが，その極端な抽象性のために，簡単な物事をわざわざ難しくしようとしているように感じさせてしまうところがあります．しかしそうした抽象概念は，むしろ，「不連続な世界でも意味のある幾何学をつくりたい」といった素朴な願望や夢を実現するために，必要に迫られて生み出されたものです．かつては実態がないと思われていた負の数や複素数などの「抽象概念」が，現代の科学技術に不可欠なものとなっているように，現代数学が生み出した「役に立たない」と思われていた抽象概念も，時間とともに徐々に社会に浸透し，活用され始めています．例えば情報科学の分野では，コホモロジーがデータの構造やパターンをとらえるための強力なツールとして活用され，トポロジカルデータ解析という新たな分野を開拓し，実務に応用されています．

モチーフ――コホモロジーの親玉

エタール・コホモロジーのほかにも，用途に応じてさまざまなコホモロジーが開発されています．例えば，代数多様体の「微分幾何的な構造」を取り出すドラーム・コホモロジー，「正標数の世界の解析的な構造」を引き出すクリスタリン・コホモロジーなどです．これらは代数多様体の異なる側面に着目してつくり出されており，一見，互いに無関係です．しかし，それにもかかわらず，これらの異なるコホモロジーはいくつかの共通の性質を持ちます．さらに，さまざまな比較定理も成り立ちます．すなわち，適切な設定のもとでは，異なるコホモロジーが線型空間として同型になってしまうのです．

出自が全く異なるコホモロジーの間に，このような深い関係があるのは単なる偶然でしょうか．グロタンディークは「コホモロジーたちの背後に，その親玉に相当する対象が存在するに違いない」と考え，その仮想的な対象を「モチーフ」と名付けました[(1)]．

モチーフという言葉はもともと，音楽や絵画などの芸術作品を創り出す「原動力」を表す用語です．グロタンディークは，さまざまなコホモロジーを創り出す原動力，という意味でこの用語を転用したようです．そして実際にグロタンディークは，代数多様体が「射影的かつ滑らか*8」という条件を満たすという仮定のもとで「モチーフ」を実際に構成することに成功しました．これは現在では「純モチーフ」と呼ばれています[(2),(3)]．

混合モチーフ

しかし，グロタンディークの理論に「射影的」という条件がついているのは何とも不満足です．実際，上で出てきたコホモロジーの多くは，射影的とは限らない滑らかな代数多様体に対しても定義されているからです．そこでグロタンディーク以後，「射影的」という条件を除去してモチーフ理論を一般化する試みが行われました．その結果生まれたのが「混合モチーフ理論」です．混合モチーフ理論は，花村・レヴィン・ヴォエヴォドスキーにより独立に，異なる流儀で構成されました[(3)]．以下ではヴォエヴォドスキーの方法を説明します．

大雑把には，ヴォエヴォドスキーのアイデアは「セル複体への分割」に相当する操作を代数幾何の枠組みで考えるというものです．前述のとおり，方程式を実数・複素数の範囲で解いて得られるグラフをセル分割するというナイーブな方法では，数論的な情報をとらえることができません．グラフ上の点が有理数の解か否かという情報は，その点を少しでも動かしてしまうと失われてしまうためです．

ヴォエヴォドスキーがめざしたのは，整数や有理数といった不連続な世界において

＊8　代数多様体のうち，通常の座標空間（アファイン空間）に無限遠を付け加えてできる射影空間の中で斉次方程式の解として得られるものを射影的な代数多様体といいます．直感的には，代数多様体上の点が無限遠まで飛んでいってもきちんと収束先があるようなもの．また，図形に自己交差や尖ったところがあると，それは特異点と呼ばれます．代数多様体が滑らかとは特異点がないことです．

も役に立つ「連続変形」の概念を構築することでした．通常の連続変形では，変形パラメータ（＝時間軸）として実数直線を用いますが，数論的情報をとらえるためには実数直線を使うわけにはいきません．そこでヴォエヴォドスキーは実数直線の代わりに「アファイン直線」という代数多様体を用いました．アファイン直線は，考えている数の範囲にかかわらず「1次元の座標軸」を表現する便利な代数多様体です．実数の世界では実数直線，複素数の世界では複素平面に対応します（複素平面は，実数の立場からみると2次元ですが，複素数の立場からみると1変数で表される1次元の空間です）．

ヴォエヴォドスキーはこのアイデアを精密な理論へと見事に結実させました．理論の構成から当然期待されることとして，彼の理論からはセル・コホモロジー（およびその一般化である特異コホモロジー）の代数幾何的な類似物が生み出されます．それこそが混合モチーフにほかなりません．混合モチーフには，代数多様体のさまざまなコホモロジーの情報が内在しています．例えば，特異コホモロジー，エタール・コホモロジー*9，ドラーム・コホモロジーの情報は，すべて混合モチーフから導き出すことができます．すなわち，混合モチーフはさまざまなコホモロジーの「親玉」になっているわけです．ヴォエヴォドスキーは彼自身が構築した混合モチーフ理論を用いて，コホモロジーの比較定理の一種であるミルナー予想（およびその一般化であるブロック・加藤予想）を解決し，フィールズ賞の栄誉を受けています．

モチーフのさらなる一般化へ向けて

混合モチーフのもっとも重要かつ特徴的な性質として「ホモトピー不変性」があります．通常の図形の連続変形の理論では，実数直線を変形のパラメータとして用いています．このことからほぼ自動的に，実数直線は1点に連続変形できてしまうことが従います．実際，実数直線上の点 x を時刻 t で点 $(1-t)x$ に移す連続変形を考えれば，時刻 $t=0$ では初期位置 $(1-0)x=x$ にある点が，時刻 $t=1$ では原点 $(1-1)x=0$ に移動してしまうからです．

混合モチーフ理論では，実数直線の代わりにアファイン直線を変形パラメータとして用いています．したがって，前述の議論と同様に，アファイン直線は1点に「連続変形」されてしまいます．これは裏を返せば，混合モチーフ理論ではアファイン直線と1点が区別されないことになります．この性質を混合モチーフの「ホモトピー不変性」と呼びます．

ホモトピー不変性は非常に強力な性質で，混合モチーフのさまざまな有用な性質を導きます．しかし一方で「混合モチーフ理論によってとらえられるコホモロジーはホモトピー不変性を満たすものに限られる」という根本的な制約も抱え込むことになります．数論幾何にはホモトピー不変性を満たさないコホモロジーが多数存在しますが，これらはすべて混合モチーフ理論の射程外となってしまうのです．

そこで筆者らは，ホモトピー不変性を「より弱い」性質に置き換えて理論全体を一から再構成することにより，混合モチーフ理論を一般化する「モジュラス付きモチーフ理論」を構築しました(4),(5)．数論幾何に現れる有用なコホモロジーの多くは，この新たなモチーフ理論で制御されることが期待されています．実際，構造層係数コホモロジー，ホッジコホモロジー，巡回コホモロジーなどの，ホモトピー不変性を満たさない代表的なコホモロジーが一般化モチーフによって制御されることが証明されています．

今後の展望

モジュラス付きモチーフ理論は，従来のモチーフ理論ではとらえられなかった幅広いクラスのコホモロジーを制御するものと期待されます．中でも，近年発達の著しい p 進コホモロジーの理論の制御は重要な課題です．本稿で出現したエタール・コホモロジーは，正確には l 進エタール・コホモロジーと呼ばれるものです（以下，l 進コホモロジーと呼びましょう）．標語的には，l 進コホモロジーは代数多様体の位相幾何的な側面に着目するコホモロジーであり，p 進コホモロジーは解析的な側面に着目するコホモロジーです．着目する性質が異なるにもかかわらず，やはり両者の間には興味深い類似や対応関係が観察されています(6)．当然，その背後には「モチーフ」が隠れているはずです．しかし，p 進コホモロジー（の少なくとも一部）はホモトピー不変でないため，従来のモチーフ理論ではとらえることができません．しかし，モジュラス付きモチーフ理論を用いて p 進コホモロジーを制御できれば，従来は「類似」としてしかとらえられていなかった2つの理論を共通の土俵で比較できるようになります．新たなモチーフ理論を基盤として，不思議な類似が生み出される未知のメカニズムの解明に成功すれば，数論の研究全体に大きなインパクトを与えられると考えています．

＊9　エタール・コホモロジー：正確には l 進エタール・コホモロジー．

■参考文献

(1) グロタンディーク：“数学と裸の王様 新装版：ある夢と数学の埋葬 収穫と蒔いた種と 一数学者のある過去についての省察と証言，”現代数学社，2015.

(2) https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~tetsushi/files/hokudai200609.pdf

(3) 山崎：“モチーフ理論，”岩波数学叢書，2022.

(4) B. Kahn, H. Miyazaki, S. Saito, and T. Yamazaki: “Motives with modulus, I, II,” Épijournal de Géométrie Algébrique, epiga:5979, 5980，2021.

(5) B. Kahn, H. Miyazaki, S. Saito, and T. Yamazaki: “Motives with modulus, III,” Ann. K-Theory，Vol. 7，No.1, pp.119-178, 2022.

(6) https://www.ipmu.jp/sites/default/files/imce/press/N35_J02_Feature.pdf

宮﨑　弘安

モチーフ理論に代表されるように，数学は「一見全く異なる対象・現象の背後に共通構造を見出し，結び付ける」力を持っています．分野の枠にとらわれることなくさまざまな領域を「つなぐ」ことが，NTT基礎数学研究センタの使命の1つです．

◆問い合わせ先

NTTコミュニケーション科学基礎研究所
企画担当
TEL　0774-93-5020
FAX　0774-93-5026
E-mail　cs-jousen-ml＠ntt.com

URL https://journal.ntt.co.jp/article/27010
DOI https://doi.org/10.60249/24075005

行列式に始まる表現論と組合せ論

確率分布の統一的扱いの考察から現れた α-行列式は行列式とパーマネントを補間するものです．それ自体に不変性はありませんが，それが生成する一般線型（リー）群の表現は，その既約分解を通して興味深い不変式を定め，対称関数，表現論，組合せ論，数論，確率論などの未解決予想にもつながる豊かな数学を生んでいます．

キーワード：#α-行列式，#リース行列式，#表現の既約分解

Cid Reyes-Bustos
若山（わかやま）　正人（まさと）
NTT基礎数学研究センタ

はじめに

本稿では，**リー群**の中でも行列の線型変換としての合成で積が定義されている行列のなす群，中でももっとも基本的な一般線型群の表現論の，またその特別な表現論を出発点として，さまざまな数学につながり広がる研究を，未解決予想や探究すべき重要テーマに寄り道をしつつ紹介します．なおリー群とは，群構造を持つ幾何学的対象（微分可能多様体）であり，群構造と可微分構造とが両立しているものです．

■群

集合 G が群であるとは，①積 $G\times G\ni(g,h)\to gh\in G$ が定義されて結合律 $(gh)k=g(hk)$ が成立，②単位元 $e\in G$ が存在：すべての $g\in G$ に対して $ge=eg=g$ が成立，③逆元 g^{-1} がつねに存在する：$gg^{-1}=g^{-1}g=e$ が成立．

例としては，m 個の文字の置換の全体からなる m-次対称群 $\mathfrak{S}_m$，そして n 次の実数（複素数）を成分に持つ正則行列（逆行列を持つ行列）全体がなす一般線型群 $GL_n(\mathbb{R})$ $\left(GL_n(\mathbb{C})\right)$ などがあります．後者は本稿で扱う群です．

■リー群・リー環の表現論

G の表現とは G からベクトル空間 V の線型変換のなす群への準同型（*i.e.* 積を保つ）写像 π の組 (π,V) です．ここではもっぱら有限次元表現のみを考えます．V が無限次元のときは，位相を入れて考える必要があります．V として，通常は複素ベクトル空間を考えます．（n 次元の）V に内積（エルミート内積）を入れて，ユニタリ行列がなすユニタリ群 $U(n)$ を考えることもあります．また，この状況を，群 G が V に作用している，あるいは V は G-加群であると言ったりします．さらに，文脈上明白であれば記号 π を省略します．表現論は，量子力学や相対論という革命的な物理理論と並走するように発展したため，用語において数学と物理のニュアンスが混在していることが多くあり，利点とともに戸惑いを生むこともあります．

しかしながら，リー群 G は多様体ですので，“曲がっていたり”，連結でないなど，構造が複雑であり線型代数だけでは話が徹底しません．そのため，リー群 G を“微分した”**リー環** $\mathfrak{g}$ というものを可能な範囲で活用します．理論的には道具として不足ですが，本稿では有限次元表現のみを扱うためリー環で事が足ります．実際，幾何学的にはリー環とは単位元 e における接空間がなす線型空間です．よって線型代数を駆使できます．つまり，リー群の作用からくる変換の無限小変換を考えるわけです．$GL_n(\mathbb{C})$ のリー環 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ は n 次行列全体（全行列環）です．そこで $X\in\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ に対して行列の指数写像を考えると $\det(\exp X)=e^{\mathrm{tr}X}\neq0$ から $\exp X\in GL_n(\mathbb{C})$ が分かります．したがって，$GL_n(\mathbb{C})$ が Mat_n 上の多項式 f に $(g.f)(x)=f(g^{-1}x)$ として作用するとき，その無限小作用は次のように定まります．

$$(X.f)(x)=\frac{d}{dt}f(\exp(-tX)x)|_{t=0}.$$

■ α-行列式の表現論研究の契機

確率論の文脈で定義された α-行列式は行列式の拡張であり，行列式とパーマネント（行列式の定義において符号がないもの）を補間するものです．以下で採用する α-行列式の定義によると，それは $\alpha=-1$ のときに通常の行列式となり，$\alpha=1$ のときにパーマネントとなります．α-行列式という名称は白井・高橋[(1)]に沿ったものです（α-行列式は[(2)]において，最初は α-パーマネントとして導入されました）．そこでは，昨今の金融時系列データ解析などで重要な，ボゾン点過程，ポアソン点過程，フェルミオン点過程の一般化となる点過程の構成を目的に α-行列式を用いました．しかしながら，α-行列式（$\alpha\neq-1$）は $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ のような乗法性を持ちません．それでは

疑問1：積の性質（乗法性）はいったいどこに行ってしまったのでしょう？

行列式は $GL_n(\mathbb{C})$ の1次元表現を定めます．パーマネントが定めるのは1次元表現ではありませんが，対称テンソル積が張る空間上に既約表現を定めます．ここで**既約表現**とは，$\{0\}$ と自分自身 V 以外に群 G の作用で不変な部分空間がない表現のことを言います．気分としては，（1と自分自身以外に約数がない）素数や素粒子のようなものです．では

疑問2：一般の α の場合，群で動かすとどんな空間を張るのでしょう？

以上は α-行列式が定める $GL_n(\mathbb{C})$ の表現論を考える契機となった疑問です[(3)]．

α-行列式

α-行列式はパラメータ α による行列式の変形であり，正方行列 $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathrm{Mat}_n$ に対して**式(1)**のように定義されます．ここで $\nu_n(\sigma)$ は $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ のサイクル分解に現れるサイクルの個数です．以下では $\nu(\sigma):=n-\nu_n(\sigma)$ とおきます．$\nu(\sigma)$ は σ を互換の積として表す際に必要となる互換の個数の最小値にも等しいことに注意しておきます．

Vere-Jones の定理[(2)]は，$\det(I_n-\alpha tA)^{-\frac{1}{\alpha}}$ の展開が次のように α 行列式を使って書け

るというものです（**式(2)**）．この等式の発見の経緯と応用については 参考文献(4)を参照ください．

$$\det^{(\alpha)}A := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu_n(\sigma)}\, a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n} \tag{1}$$

$$\det(I_n-\alpha TA)^{-\frac{1}{\alpha}} = \sum_{k\ge0}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k\ge0} t_{i_1}\cdots t_{i_k}\det^{(\alpha)}\left(a_{i_p,i_q}\right)_{1\le p,q\le k} \tag{2}$$

■表現論の準備

$GL_n(\mathbb{C})$ とそのリー環 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の有限次元既約表現（既約 $\mathfrak{gl}_n$-加群）は，**最高ウェイト**というものでパラメトライズされることが知られています．その背後には，$GL_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^n$ への標準的な作用に対して，m 個のテンソル積空間 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$ に対する自然な $GL_n(\mathbb{C})$ の作用を考えると，m 個のテンソル積の間の置換として働く対称群 $\mathfrak{S}_m$ の作用が（互いに精一杯に）交換可能という事実から導かれる双対性があるからです．これが有名な *Schur-Weyl* **相互律**です[5]．また，最高ウェイトは**分割**というものと同一視できます．ただし $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\dots)$ が n の分割とは $n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots(\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots)$ といい，このとき $\lambda\vdash n$ と表します．$l(\lambda)$ で λ の長さ（非ゼロ成分の個数）とします．分割 λ とそれが定める**ヤング図形**

$$\left\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 \,\middle|\, 1\le j\le\lambda_i, i\ge1\right\}$$

をしばしば同一視します．またヤング図形を「左揃えで，上から i 段目に λ_i 個の箱を並べたもの」と図示します（**図 1**）．$\mathrm{Stab}(\lambda)$ で λ のヤング図形に対する**標準盤**の全体がなす集合を表します．ここで標準盤とは n 個の箱に 1, 2, … , n の数を「各行で数は左から右に増加，各列で数は上から下に増加するように入れた」ものです．

(a)　分割(5,3,2) ⊢ 10に対応するヤング図　　(b)　標準盤の例

図 1　ヤング図形 - 分割の視覚化

■ α-行列式が生成する巡回加群

一般線型リー代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の $\{x_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$ に関する多項式（がなす）環 $\mathcal{A}(\mathrm{Mat}_n)$ への作用は合成関数の微分法より

$$E_{ij}.f=\sum_{k=1}^{n}x_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_{jk}}.$$

ただし E_{ij}（$1\le i,j\le n$）は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の標準基底（行列単位）です．$X=(x_{ij})$ として，$\det^{(\alpha)}X$ が生成する巡回 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$-加群を $V_n(\alpha)$ とします．つまり $V_n(\alpha)$ は，$\det^{(\alpha)}X\in\mathcal{A}(\mathrm{Mat}_n)$ に $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ のあらゆる元を任意回作用させて，そのすべてで張られるベクトル空間（加群）です．$\alpha=-1$ のときは $\det^{(\alpha)}X=\det X$ なので $V_n(-1)=\mathbb{C}\cdot\det X$ です．したがって，$V_n(\alpha)$ の構造を調べるという問題は**疑問 1** と**疑問 2** 双方への回答をめざすものです．

定理 2.1 [3]．$\mathbf{E}_n^{\lambda}$ を最高ウェイト λ を持つ既約 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$-加群とする．このとき $V_n(\alpha)$ は次のように既約分解される：

$$V_n(\alpha)\cong\bigoplus_{\substack{\lambda\vdash n\\ f_\lambda(\alpha)\neq0}}\left(\mathbf{E}_n^{\lambda}\right)^{\oplus f^{\lambda}}.$$

ただし $f^{\lambda}:=|\mathrm{Stab}(\lambda)|$（元の個数），$f_\lambda(x):=\prod_{(i,j)\in\lambda}(1+(j-i)x)$（分割 λ の content polynomial）である．

この定理は，$\alpha\notin\left\{\pm1,\pm\frac{1}{2},\dots,\pm\frac{1}{n-1}\right\}$ であれば，$V_n(\alpha)$ は標準表現 $\mathbb{C}^n$ のテンソル積 $\left(\mathbb{C}^n\right)^{\otimes n}$ に同値であり，α が $|n|$ 未満の整数の逆数となる場合に構造の退化が起こる，という状況を示しています．

この問題の自然な一般化として，冪 $\left(\det^{(\alpha)}X\right)^{l}$ が生成する巡回 $\mathfrak{gl}_n$-加群の構造を調べる問題があります．この場合，既約分解に現れる各最高ウェイト加群に，組合せ論的に非自明な重複度の評価が現れます．この重複度の評価は一般的に困難です．ただし $n=2$ のときは，対称群とそのヤング部分群の対 $(\mathfrak{S}_{2l},\mathfrak{S}_l\times\mathfrak{S}_l)$ がゲルファント対と呼ばれるものとなり，ゲルファント対に対する帯球関数の値が超幾何多項式を用いて書けるという事実から，重複度を明示的に表す公式が得られます[6]．一般の場合は具体的な予想すらできていませんが興味が尽きない問題です．また，対称関数の理論においてもっとも古典的で根本的な問題の 1 つにプレシズム[7]といわれるものがあります．参考文献(8)では $\det^{(1)}(X)$（パーマネント）の冪に関してそれが生成する巡回加群の構造からプレシズムについて対称テンソル積に関するある予想を提示していますが，高次の冪 ℓ の場合は大変難しく，$n=2$ では任意の ℓ に対して確認できるものの，$n=3$ のときでさえ $\ell=2$ の場合しか確認できていません．また対応する研究は量子群の場合にも進められています[9]．特に $n=2$ の場合に，上述の重複度が q-超幾何多項式と超幾何多項式の両者！ が混ざり合った多項式で表示され，ふしぎな魅力を感じます[10],[11]．

リース行列式

α が $\pm\frac{1}{k}$ のときに α-行列式が生成する巡回加群は退化するのでした．この特殊性を注意深く眺めると，$\alpha=-\frac{1}{k}$ のとき α-行列式に**弱い交代性**が見つかります．実際，1, 2, … , n から任意に $k+1$ 文字を選び，他を動かさない置換全体からなる $\mathfrak{S}_n$ の部分群を K とすると $\sum_{\sigma\in K}\det^{(\alpha)}\left(AP(\sigma)\right)$ は，$(1+\alpha)(1+2\alpha)\dots(1+k\alpha)(A\in\mathrm{Mat}_n)$ を因数に持ちます．つまり $\sum_{\sigma\in K}\det^{\left(-\frac{1}{k}\right)}\left(AP(\sigma)\right)=0$ となり A の列のうち $k+1$ 個が一致すれば $\det^{\left(-\frac{1}{k}\right)}A=0$ が分かります．また $P(\sigma)$ を $\sigma\in\mathfrak{S}_p$ に対する置換行列とすると $\det^{(\alpha)}\left(AP(\sigma)\right)=\det^{(\alpha)}(P(\sigma)A)$ により，行についても同様です．この弱い交代性のおかげでヴァンデルモンド行列式やコーシー行列式といった特殊行列式の類似も得られます[12]．

■リース行列式と不変式

すべての成分が1である $p\times q$ 行列を $1_{p,q}$ とします．$A\in\mathrm{Mat}_{n,kn}$ に対してその k-リース行列式を以下で定義します．

$$\mathrm{wrdet}_k A \coloneqq \det^{\left(-\frac{1}{k}\right)}\left(A\otimes 1_{k,1}\right).$$

例えば，リース行列式（**式(3)**）は，以下のように行列式と類似の特徴付けを持つ左-GL_k，右-$\mathfrak{S}_k\wr\mathfrak{S}_n$ **相対不変式**です．ここで $\mathfrak{S}_k\wr\mathfrak{S}_n$ は $\mathfrak{S}_k$ と $\mathfrak{S}_n$ のリース積と呼ばれ，（2つの群から新しい群をつくる）群の半直積という概念を通して構成されるものです．

定理 3.1[12]．写像 $f\colon \mathrm{Mat}_{n,kn}\to\mathbb{C}$ であって以下を満たすものは定数倍を除いて $A\mapsto \mathrm{wrdet}_k A$ に限る．

1. f は列に関して多重線型写像，
2. 任意の $Q\in\mathrm{Mat}_n$ に対して $f(QA)=(\det Q)^k f(A)$．特に左-GL_k-相対不変，
3. 任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_k\wr\mathfrak{S}_n$ に対して $f\big(AP(\sigma)\big)=\pm f(A)$．特に $\sigma\in\mathfrak{S}_k^n$ に対して $f\big(AP(\sigma)\big)=f(A)$．

この定理の背後には (GL_n, GL_{kn})-duality という双対性があり，それを用いれば簡潔に導かれますが，（記号を適切に準備すれば）初等的かつ直接的にも証明できます．

■リース行列式が定める群・部分群の群行列式アナログ

有限群の指標理論はフロベニウスによって始まりました．そのときに**群行列式**が重要な役割を果たしました．群行列式は，有限群 G に対し，不定元 $x_g\,(g\in G)$ を用意して

$$\Theta(G)\coloneqq\det(x_{uv^{-1}})_{u,v\in G}$$

と定義されます．群行列式は群の同型類に関する完全不変量です．すなわち，次が成立します．

$$\Theta(G)=\Theta(G')\Leftrightarrow G\cong G'$$

フロベニウスは自身が基本定理と呼んだ重要な定理，現代的にいうと群の正則表現（G が G 自体の群環に作用）の既約分解を与えました．このフロベニウスの成果は1896年にデデキントがフロベニウスに宛てた手紙が発端でした．デデキントは有限アーベル群に対して群行列式がどのように分解するのかを示したうえで，非アーベル群のときには群行列式がどのように分解されるかをフロベニウスに手紙で尋ねたのでした．表現論が創始された瞬間です．

さて，k-リース行列式は $n\times kn$ 行列に対して定義されるので，有限群 G とその指数 k の部分群 H のペア (G,H) に対して群行列式の類似を

$$\Theta(G,H)\coloneqq\mathrm{wrdet}_k\left(x_{hg^{-1}}\right)_{h\in H,g\in G}$$

と定めたくなります．しかしながらリース行列式には列の入替に関する相対不変性がありませんので，この定義は行列成分の並び順に依存します．そのため，群の元に名前・番号を付与して定義する必要があります．今，全単射 $\phi\colon\{0,1,\dots,kn-1\}\to G$ を1つ固定して，$g_i=\phi(i)$ と書き，これを G の元の番号付けと呼ぶことにします．ここで，$\mathbb{C}$-代数（例えば $(kn-1)$-変数の多項式環）A を考えて $f\colon G\to A$ を1つ定めることで特殊化と呼びます．G が有限アーベル群のとき，G の元に番号を付け，$f\colon g_i\mapsto q^i$ という特殊化を選ぶと，$\Theta(G,H)$ が q^i-1 の形の因数たちの積にきれいに分解することなどが分かります[13]．具体例を1つ挙げます．そのため，分割 $(k^n)=(k,\dots,k)\vdash kn$ に対応する $\mathfrak{S}_{kn}$ の既約指標 $\chi^{(k^n)}$ を $\mathfrak{S}_k^n$ 上で平均して得られる両側 $\mathfrak{S}_k^n$-不変な $\mathfrak{S}_{kn}$ 上の関数 $\omega^{(k^n)}$ を**式(4)**で定義しておきます．

例 3.1．$G=\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$，$H=\mathbb{Z}_n\times\{0\}$ のとき，**式(5)**で $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_{n^2}$ は $P(\tau)\coloneqq P\big((1\ 2\ \dots\ n)\big)\otimes P\big((1\ 2\ \dots\ n)\big)$，$1_{1,n}\otimes I_n=\left(I_n\otimes 1_{1,n}\right)P(\sigma)$ から定まり，**式(6)**が得られます．特に n が3以上の奇数ならば $\Theta(G,H)=0$ です．

しかしながら現時点では，群・部分群行列式による新しい理論は構築されていませ

$$\mathrm{wrdet}_2\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\end{pmatrix}=\det^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\end{pmatrix}$$
$$=\frac{a_1a_2b_3b_4}{4}-\frac{a_1a_3b_2b_4}{8}-\frac{a_2a_3b_1b_4}{8}-\frac{a_1a_4b_2b_3}{8}-\frac{a_2a_4b_1b_3}{8}+\frac{a_3a_4b_1b_2}{4}. \qquad (3)$$

$$\omega^{(k^n)}(x)=\frac{1}{(k!)^n}\sum_{g\in\mathfrak{S}_k^n}\chi^{(k^n)}(xg)\qquad(x\in\mathfrak{S}_{kn}). \qquad (4)$$

$$\Theta(G,H)=\omega^{(n^n)}(\sigma\tau^{-1})\left(\frac{n!}{n^n}\right)^n q^{\frac{n^3(n-1)}{2}}(q^n-1)^{n(n-1)}. \qquad (5)$$

$$\omega^{(n^n)}(\sigma\tau^{-1})=\frac{1}{n!^n}\times\left\{\left(\det\left(x_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}\right)^n \text{ における square free の項 } \prod_{i,j=1}^{n}x_{ij}\text{ の係数}\right\} \qquad (6)$$

ん．ただし，２つの興味深い研究が生まれました．木本によるAlon-Tarsi 予想との関連と，もう１つは群・部分群による新しいグラフの構成です．

■Alon-Tarsi 予想

各行・各列の成分が$1 \sim n$の順列となっているn次行列をn次の**ラテン方陣**と呼びます．例えば３次のラテン方陣は**図２**〔下，右，左（実際の場所に依存します）〕にリストアップしている12個です．n次のラテン方陣Lに対してその符号$\mathrm{sgn}L$を行と列の置換の符号の積として定めます．$\mathrm{Sgn}L=1$のとき偶方陣，$\mathrm{sgn}L=-1$のとき奇方陣と呼びます．nが奇数であれば，互換$(1,2)$に対して$\mathrm{sgn}\left(P\left((1,2)\right)L\right)=(-1)^n\mathrm{sgn}L$ですので，両者間の全単射が導かれ，$n$次の偶方陣と奇方陣が同数であることは明らかです．一方で，

予想 3.2（Alon-Tarsi 予想(1992)）．nが偶数のとき，n次のラテン方陣において偶方陣と奇方陣の個数は異なる．

これは，元々はグラフのある種の彩色問題に由来する予想でしたが，グラフ理論を離れたところでも，n次元ベクトル空間のn個の基底の合理的な選択可能性に関するRota予想や特殊ユニタリ群$SU(n)$のsquare-free座標関数積のハール測度（$SU(n)$-両側不変測度）による$SU(n)$全体での積分の非零性などの同値命題や，そこから従う非自明な命題もあり興味深いものです．そうした中，木本はリース行列式を用いた新しい同値命題を発見しました[12]．

定理 3.2　nを偶数とする．このときn次のラテン方陣に対するAlon-Tarsi 予想は以下の３つのそれぞれと同値．

1. $\mathrm{wrdet}_n\left(\overbrace{I_n\, I_n\ \dots\ I_n}^{n}\right)\neq 0$

2. $\omega^{(n^n)}(g_n)\neq 0$

3. $\sum_{y\in\mathfrak{S}_n^n}\left(-\frac{1}{n}\right)^{\nu(g_n y)}\neq 0$

ただし$g_n\in\mathfrak{S}_{n^2}$は$g_n\left((i-1)n+j\right)=(j-1)n+i\,(1\leq i,j\leq n)$なる置換であり，$\mathfrak{S}_n^n$は$\{(i-1)n+j\,|\,1\leq j\leq n\}\,(i=1,\dots,n)$たちを保つような置換の全体がなす$\mathfrak{S}_{n^2}$の部分群である．

容易に確かめられそうな風貌をしたAlon-Tarsi 予想ですが，数論や組合せ論でしばしばみられるように手強い相手です．現時点での最良成果は，pを奇素数として，$n=p+1$の場合のDrisko (1997)，$n=p-1$の場合のGlynn (2010) による証明です[14]．なお，後者については，リース行列式を用いた別証明が木本[15],[16]により得られています．ところでラテン方陣の個数$\mathrm{ls}(n)$については，かなり弱いものですが漸近公式$\mathrm{ls}\,(n)^{1/n^2}\sim e^{-2}n$が知られています[17]．偶奇方陣の個数についても漸近的には大体等しいようです（そのため，予想の解決が難しいといってもよいでしょう）．そこで新しい研究課題を挙げておきましょう．

問題 3.3　次の比例式が成り立つようなラテン方陣ゼータ“$\zeta_{LS}(s)$”を（あれば）見つけよ．

究極の素数定理 (↔リーマン予想)：リーマンゼータ$\zeta(s)$＝Alon-Tarsi 予想：$\zeta_{LS}(s)$.

$$
\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&1&2\\2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&2\\3&2&1\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&1\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2&1\\1&3&2\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&3&2\end{pmatrix}
$$

図２　リストアップした12個の行列

■群・部分群ペアグラフ

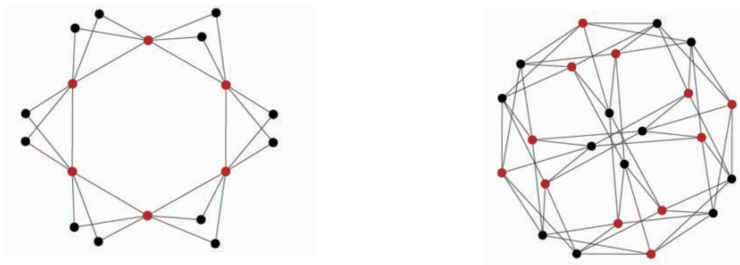
グラフ理論において**ラマヌジャングラフ**というものがあります．ラマヌジャングラフはスペクトルグラフ理論的に“最良の”高拡散性・急撹拌性を持つエクスパンダーグラフです．ラマヌジャングラフはその性質から，例えば暗号学的ハッシュ関数の構成といった応用を持つため重要です．またグラフがラマヌジャンであることはそのグラフのゼータ関数が**リーマン予想の類似**を満たすことと同値であり，数論的観点からも興味を持たれてきました．ラマヌジャングラフの無限族を具体的に構成することは重要課題の１つで，Lubotzky-Phillips-Sarnak (1994) によるハミルトン四元数環とその極大整環を用いた有限体上の射影線型群に対する**ケーリーグラフ**としての構成や，Pizer (1990) による有限体上の超楕円曲線の同型類の間の同種写像を用いた構成が有名です．ここでケーリーグラフとは，（有限生成の）群Gの各元を頂点とし，生成元をかけることによって移る元を辺でつないだグラフです．前者では，実際にpが４を法として１と合同な素数であるときに$(p+1)$-正則ラマヌジャングラフの無限族を構成しました．

新しい方向としては，ケーリーグラフの拡張である**群・部分群ペアグラフ**（有限群とその部分群および群の適当な生成系から定まるグラフ，**図３**に対してハッシュ関数を定義し，その暗号学的な安全性に関する問題の定式化があります[18]．ここで群・部分群ペアグラフ$\mathcal{G}\,(G,H,S)$とは，群Gとその部分群H，そして$S\cap H$が対称となる部分集合$S\subset G$をとりケーリーグラフのように定義される一般には非正則なグラフです．つまり$\mathcal{G}\,(G,H,S)$はGの各元を頂点として$h\in H$と$g\in G$に対して条件$h\sim g\ \Leftrightarrow\ g=hs\,(s\in S)$なる関係～を満たすとき辺としてつないでできるグラフです[19]．群・部分群ペアグラフによりラマヌジャングラフを構成することができますが，無限族の構成には至っていません（図３(b)）．応用上も背後の数学の進歩という点からも無限族の構成は大きな目標です．

正の特異値をめぐって：Wishart 分布, Wallach 集合, α-行列の正値性

負の特異値に対するリース行列と同様に，$\alpha=\frac{1}{k}$のときに期待されるパーマネント的な構造の研究は自然です．探究のヒントになりそうなことを述べて本稿を閉じたいと思います．

ユークリッド空間における凸錐上の正定値関数を考えることは最適化問題にも応用があります．ところで，対称錐上（リー群の対称空間）の正則関数がなすヒルベルト空間の解析，ユニタリ表現論において，いわゆる Wallach 集合という重要で一般的な概念があります．対称錐上の積分核にお



(a)　位数18の巡回群・位数6の巡回群のペアグラフ　(b)　対称群$\mathfrak{S}_4$・交代群A_4のペアグラフ

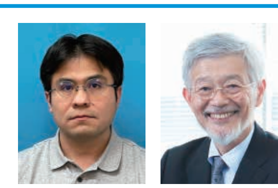
図３　群・部分群ペアグラフ

いてWallach集合は本質的に正の特異値$\frac{1}{k}$の逆数たちで与えられます[20].

統計学にWishart分布というものがあります．それはχ二乗分布の多変数一般化であり，半正定値対称行列に対する分布です．互いに独立なn個のp変量の確率ベクトル$x_1, x_2, \dots, x_n$, $(n \geq p)$が，平均が0，共分散行列がΣの多変量正規分布$N(0, \Sigma)$に従うとき，$X = \sum_{k=1}^{n} x_i {}^t x_i$は自由度$n$のWishart分布に従います．Wishart分布は標本サイズでスケーリングされた後，多変量正規乱数データに対する標本の共分散行列の分布のモデルとして多くの場合に使用される重要な分布です．Wishart分布は対称半正定値行列がなす対称錐との関係から，いわゆるジョルダン代数の表現論[20]の応用分野の１つです．一方で，α-行列式はこのWishart分布を用いての確率論的な表示を持つことが知られています[21]．このことを利用して白井は，非負定値の実対称，あるいはエルミート行列の場合にαがそれぞれ$\{2/k\}_{1\leq k<n}$, $\{1/k\}_{1\leq k<n}$のときにそのα-行列式の非負定値性を示しました．証明にはJack多項式[7]といわれる重要な対称関数による議論が要となっています．本質的に，これらの値は本稿の負の特異値に一致しています．理由の解明が必要です．

■参考文献

(1) T. Shirai and Y. Takahashi：“Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: Fermion, Poisson and boson point processes.” J. Funct. Anal., Vol. 205, pp. 414-463, 2003.
(2) D. Vere-Jones：“A generalization of permanents and determinants,” Linear Algebra Appl., Vol. 63, pp. 267-270, 1988.
(3) S. Matsumoto and M. Wakayama：“Alpha-determinant cyclic modules of $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ ” J. Lie Theory, Vol.16, pp. 393-405, 2006.
(4) D. Vere-Jones：“Alpha-permanents and their applications to multivariate gamma, negative binomial and ordinary binomial distributions,” New Zealand J. Math., Vol. 26, pp. 125-149, 1997.
(5) W. Fulton and J. Harris：“Representation Theory：A First Course（Graduate Texts in Mathematics, 129), Springer, 1991（木本（訳）：“フルトン-ハリス表現論入門 上・下,” 丸善出版, 2023-24）.
(6) K. Kimoto, S. Matsumoto, and M. Wakayama：“Alpha-determinant cyclic modules and Jacobi polynomials.” Trans. Amer. Math. Soc., Vol.361, pp. 6447-6473, 2009.
(7) I. G. Macdonald：“Symmetric functions and Hall polynomials,” Oxford Univ. Press, Oxford. 1979.
(8) K. Kimoto and M. Wakayama：“Invariant theory for singular α-determinants,” J. Combin. Theory Ser. A, Vol.115, pp. 1-31, 2008.
(9) K. Kimoto and M. Wakayama: “Quantum α-determinant cyclic modules of $U_q(\mathfrak{gl}_n)$, ” J. Algebra, Vol.313, pp. 922-956, 2007.
(10) K. Kimoto：“Quantum alpha-determinants and q-deformed hypergeometric polynomials,” Int. Math. Res. Not., Vol. 2009, No. 22, pp. 4168-4182, 2009.
(11) K. Kimoto：“Quantum α-determinants and q-deformations of hypergeometric polynomials,” RIMS Kokyuroku Bessatsu, Vol. B36, pp. 97-111, 2012.
(12) 木本：“対称群上の帯球関数とリース行列式,” 数理解析研究所講究録, Vol. 2031 , pp. 218-234, 2017.
(13) K. Hamamoto, K. Kimoto, H. Tachibana, and M. Wakayama：“Wreath determinants for group-subgroup pairs,” J. Combin. Theory Ser. A, Vol.133, pp. 76-96, 2015.
(14) B. Friedman and S. McGuinness：“The Alon-Tarsi conjecture: A perspective on the main results,” Discrete Math., Vol.342, No.8, pp. 2234-2253, 2019.
(15) 木本：“ラテン方陣に関するAlon-Tarsi予想と対称群上の帯球関数について,” 数理解析研究所講究録, Vol.2039, pp. 193-210, 2017.
(16) K. Kimoto：“Wreath determinants, zonal spherical functions on symmetric groups and the Alon-Tarsi conjecture.” Ryukyu Math. J., Vol.34, pp. 5-19, 2021.
(17) J. H. van Lint and R. M. Wilson：“A Course in Combinatorics（2nd ed.),” Cambridge University Press, 2001.
(18) C. Reyes-Bustos：“Towards hash functions based on group-subgroup pair graphs. in “Mathematical Foundations for Post-Quantum Cryptography”,” Springer, 2024.
(19) C. Reyes-Bustos：“Cayley-type graphs for group-subgroup pairs.” Linear Algebra Appl., Vol. 488, pp. 320-349, 2016.
(20) J. Faraut and A. Koranyi：“Analysis on Symmetric Cones (Oxford Mathematical Monographs),” Oxford, 1995.
(21) T. Shirai：“Remarks on the positivity of α-determinants.” Kyushu J. Math., Vol. 61, pp. 169-189, 2007.



（左から）Cid Reyes-Bustos/
若山　正人

ごく特殊なものに着目することから始めるものの，表現論を通して多様に広がっていく数学研究の一端を見ていただければと思い本稿を執筆しました．ご紹介したのは一部ですが，解くべき問題は山積みです．

◆問い合わせ先
NTTコミュニケーション科学基礎研究所
企画担当
TEL　0774-93-5020
FAX　0774-93-5026
E-mail　cs-jousen-ml@ntt.com

URL　https://journal.ntt.co.jp/article/27016
DOI　https://doi.org/10.60249/24075006

対称性とリー群・リー環の表現論

リー群の表現とは，線形空間の連続的な対称性を抽象化したものです．また，その微分（線形近似）を考えることにより，リー環の表現を得ることができます．これらはフーリエ解析の一般化とみなすことができ，さらに数学のみならず物理学等においても重要な道具となっています．本稿では，リー群・リー環の表現の基本的かつ重要な具体例についていくつか紹介します．また，筆者自身の最新の研究についても簡単に触れます．

キーワード：#基礎数学，#リー群，#リー環

中濱　良祐（なかはま　りょうすけ）

NTT基礎数学研究センタ

はじめに

リー群は，空間の連続的な対称性を抽象化したものです．特に，線形な対称性を考えたものはリー群の表現と呼ばれます(1)．リー群の表現は，例えば対称性を持った空間上の関数を解析する際などに役立ちます．ただ，リー群そのものは非線形な対象のため，その表現をそのまま扱うのは容易ではありません．そこで，代わりにこの微分（線形近似）を考えることにより，リー環の表現を考えることが有用です．これは元のリー群の表現の情報をほとんど保持しており，より扱いやすい対象となっています．

リー群の表現とは

まず，リー群は複素数を成分とする可逆な $n\times n$ 行列の全体〔これを通常 $GL(n,\mathbb{C})$ などと表し，一般線形群（general linear group）と呼びます〕の部分集合であって，積と逆行列，および極限を取る操作で閉じたものを指します*1．例えば，$GL(n,\mathbb{C})$ そのものや，

$GL(n,\mathbb{R})=\{$実数を成分とする可逆な $n\times n$ 行列$\}$,

$SL(n,\mathbb{C})=\{g\in GL(n,\mathbb{C})\mid \det(g)=1\}$,

$O(n)=\{g\in GL(n,\mathbb{R})\mid g^t g=I_n\}$,

$U(n)=\{g\in GL(n,\mathbb{C})\mid g^t\bar{g}=I_n\}$

などがリー群の典型的な例となります（ここで I_n は単位行列を表します）．次に G をリー群，X を“極限が定義できる”空間〔これを位相空間（topological space）と呼びます〕とします．G の元 g を1つ取るごとに X 上の変換 $\tau(g):X\to X$ が定まり，適当な意味での結合法則と連続性を満たすとき，リー群 G は空間 X に作用するといいます．例えば，単位円板（半径1の円）の原点を中心とする回転の全体は，リー群 $U(1)$ の作用とみなすことができ，また単位円板の等角変換（共形変換），すなわち交わる二曲線の角度を保つ変換の全体は，ほぼリー群 $SU(1,1)$ の作用とみなすことができます（図1）．このようにリー群 G が空間 X に作用するとき，X の対称性が G によって記述されるとみなせます．さらに作用を受ける空間 $X=V$ が線形空間で $\tau(g)$ が V 上の線形写像（すなわち和とスカラー倍を保つ写像）のとき，(τ,V) は G の表現（representation）と呼ばれます．例えば G が空間 X に作用するとき，G はその上の関数空間（例えば $V=L^2(X)=\{f:X\to\mathbb{C}\mid \int_X|f(x)|^2dx<\infty\}$：二乗可積分空間など）にも自動的に作用します．この作用は線形となり，よって $L^2(X)$ は G の表現となります．これは一般には無限次元の一見難しい表現となりますが，多くの場合複数のより簡単な表現を束ねたものになっています．したがって関数空間の理解には，より簡単な表現を詳しく理解することが重要となります．

リー群 $G\subset GL(n,\mathbb{C})$ の表現の例としてもっとも単純なものは，$V:=\mathbb{C}^n$(縦ベクトルの空間）として，各 $g\in G$ に対し，$\tau(g)$ を

$$\tau(g):\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n,\qquad \tau(g)v:=gv$$

と単に行列の積で定めるものです．より非自明な例として，k を非負整数としたとき，リー群 $G=U(n)$ の，線形空間 $V=\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$（式(1)，$n$ 変数 k 次斉次多項式の空間）への作用 $\tau(g)$ を変数への行列の積によって定めたものや，リー群 $G=O(n)$ の，線形空間 $V=\mathcal{H}_k(\mathbb{C}^n)$（式(2)，$n$ 変数 k 次斉次調和多項式の空間）への作用 $\tau(g)$ を同様に定めたものも表現となります．特に $U(n)$

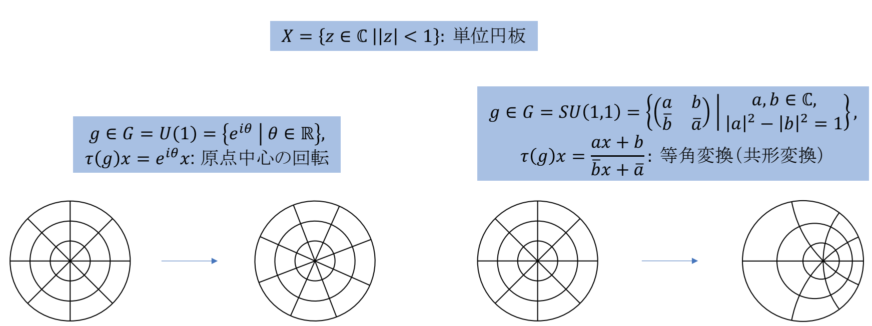


図1　$U(1), SU(1,1)$ の単位円板への作用

$$V=\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n):=\left\{f(x)=f(x_1,\dots,x_n):n\text{変数多項式}\ \middle|\ f(tx)=t^kf(x)\ \ (t\in\mathbb{C})\right\}\qquad(1)$$

＊1　より一般に，リー群は群構造と多様体構造を持ち，かつ群演算が微分可能なものを指します．特に，行列の閉部分群としては実現できませんが，これと局所的に同型なものもリー群に含まれます．

の$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$上の表現，$O(n)$の$\mathcal{H}_k(\mathbb{C}^n)$上の表現は，既約表現（それ以上分解できない表現，すなわち$\tau(G)W\subset W$を満たす線形部分空間$W\subset V$が$\{0\}$とV自身以外に存在しない表現）の例になっています．

表現の既約分解――フーリエ解析の一般化

表現論における基本的な問題の１つは，与えられた表現を既約表現の和に分解することです．特にリー群Gが作用する空間X上の関数空間（$L^2(X)$など）の既約分解は，この空間Xを理解するうえで役立ちます．例えば$G=O(n)$は$n-1$次元球面 $S^{n-1}:=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2=1\}$に通常の回転として作用し，さらにその上の関数空間$L^2(S^{n-1})$にも線形に作用します．このとき，$k$次斉次調和多項式を球面$S^{n-1}$に制限した関数（球面調和関数[(2)]）からなる空間（これを$\mathcal{H}_k(\mathbb{C}^n)|_{S^{n-1}}=:\mathcal{H}_k(S^{n-1})$で表します）はこの作用で保たれ，部分表現となります．すなわち，

$f(x)\in\mathcal{H}_k(S^{n-1})$ならば，任意の$g\in O(n)$に対し，$\tau(g)f(x)\in\mathcal{H}_k(S^{n-1})$.

さらに，任意の$f(x)\in L^2(S^{n-1})$は

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x),\qquad f_k(x)\in\mathcal{H}_k(S^{n-1})$$

の形に一意的に表すことができます．したがって，$L^2(S^{n-1})$は

$$L^2(S^{n-1})=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{H}_k(S^{n-1})$$

と直和分解されます．いま，各$\mathcal{H}_k(S^{n-1})$は既約なので，これが既約分解となります．特に$n=2$の場合には，S^1の座標を$(\cos\theta,\sin\theta)$で表すと，$\mathcal{H}_k(S^1)$は**式(3)**と表すことができ，上記の分解はフーリエ級数展開（**式(4)**）に一致します．同様に，フーリエ（逆）変換

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

は，実数の集合$\mathbb{R}$上の関数空間$L^2(\mathbb{R})$を加法群$\mathbb{R}$の表現として，一次元部分表現$\mathbb{C}e^{ix\xi}$の和で表したもの

$$L^2(\mathbb{R})=\int_{\mathbb{R}}^{\oplus}\mathbb{C}e^{ix\xi}d\xi$$

とみなすことができます．ただし，この場合非可算個の空間の和なので，直和分解ではなく直積分分解と呼ばれます．いうまでもなくフーリエ解析は信号処理をはじめ多くの分野で重要であり，また球面調和関数も量子力学で回転対称な系を扱う場合などに重要です．一般の表現の既約分解もこれらの重要な理論の一般化とみなせます．

$$V=\mathcal{H}_k(\mathbb{C}^n):=\left\{f(x)\in\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)\ \middle|\ \sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}=0\right\}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_k(S^1)&=\mathbb{C}e^{ik\theta}+\mathbb{C}e^{-ik\theta}=\mathbb{C}\cos k\theta+\mathbb{C}\sin k\theta\\&=\left\{ae^{ik\theta}+a'e^{-ik\theta}=(a+a')\cos k\theta+i(a-a')\sin k\theta\ \middle|\ a,a'\in\mathbb{C}\right\}\end{aligned}\tag{3}$$

$$f(\cos\theta,\sin\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{ik\theta}=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(b_k\cos k\theta+c_k\sin k\theta)\tag{4}$$

$(b_k=a_k+a_{-k},\ c_k=i(a_k-a_{-k}))$

$$G'=\left\{\begin{pmatrix}g&0\\0&1\end{pmatrix}\ \middle|\ g\in U(n-1)\right\}\simeq U(n-1)\tag{5}$$

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^{n-1})x_n^{k-m}:=\{f(x_1,\dots,x_{n-1})x_n^{k-m}\mid f(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^{n-1})\}\subset\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)\tag{6}$$

$$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)|_{U(n-1)}=\bigoplus_{m=0}^{k}\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^{n-1})x_n^{k-m}\tag{7}$$

$$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)|_{O(n)}=\bigoplus_{m=0}^{[k/2]}\mathcal{H}_{k-2m}(\mathbb{C}^n)\|x\|^{2m}\tag{8}$$

既約分解の中でも特に，リー群Gの表現をその部分群$G'\subset G$の表現とみなして分解する場合を分岐則（branching law）と呼びます．例えば，$G=U(n)$の部分群$G'\simeq U(n-1)$（**式(5)**）を考え，$U(n)$の表現$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$を部分群$G'\simeq U(n-1)$に制限することを考えましょう．このとき，$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$は$U(n)$の表現としては既約ですが，$U(n-1)$の表現としてみると，$\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^{n-1})x_n^{k-m}$（**式(6)**，$m=0,\dots,k$）は明らかに部分表現となります．したがって$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$の$U(n-1)$のもとでの既約分解（分岐則）は**式(7)**で与えられることが分かります．同様に，$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n)$の$G'=O(n)$のもとでの既約分解は**式(8)**（ただし$\|x\|^2:=\sum_{i=1}^n x_i^2$）で与えられることが知られています．より非自明な例として，$G=O(n)$の表現$\mathcal{H}_k(\mathbb{C}^n)$の部分群$G'\simeq O(n-1)$のもとでの分岐則を考えてみましょう．今，$m=0,1,\dots,k$に対し，$\tilde{P}_k^m(y)$を$k-m$次以下の多項式で$\tilde{P}_k^m(-y)=(-1)^{k-m}\tilde{P}_k^m(y)$を満たすとして，線形空間$W_m$（**式(9)**）を考えると，これは$O(n-1)$の既約表現であり，さらに多項式$\tilde{P}_k^m(y)$をうまく選ぶと，$W_m\subset\mathcal{H}_k(\mathbb{C}^n)$とすることができます．このとき，$\mathcal{H}_k(\mathbb{C}^n)$は$O(n-1)$のもとで，**式(10)**のよ

うに既約分解されます．この $\tilde{P}_k^m(y)$ は，実際にラプラシアンから導かれる微分方程式を解くことで求まり，ゲーゲンバウアー多項式 $C_k^{(\alpha)}(y)$ を用いて $\tilde{P}_k^m(y)=C_{k-m}^{(m-1+n/2)}(y)$ となることが分かります．$n=3$ の場合にはこれはルジャンドル陪多項式の定数倍で与えられます．これを使うと，$\mathcal{H}_k(\mathbb{C}^n)$ の基底を小さい n から順番に具体的に構成することができます（**図 2**：$n=3$ の場合）．

リー環の表現――リー群の表現の線形近似

さて，一般にリー群は線形空間ではないため，その表現をそのまま扱うのは容易ではありません．そこでリー群の代わりに，これに付随するリー環を考えます．今，$X\in M(n,\mathbb{C})$（複素数を成分とする $n\times n$ 行列），$t\in\mathbb{R}$ として，指数関数 $\exp(tX):=\sum_{j=0}^{\infty}(tX)^j/j!$ を考えると，これは通常の指数法則 $\exp\bigl((s+t)X\bigr)=\exp(sX)\exp(tX)$ と，$\frac{d}{dt}\exp(tX)|_{t=0}=X$ を満たします．そこで，リー群 $G\subset GL(n,\mathbb{C})$ に対し，付随するリー環 $Lie(G)\subset M(n,\mathbb{C})$ を

$$Lie(G):=\{X\in M(n,\mathbb{C})\mid \text{すべての } t\in\mathbb{R} \text{ に対し，} \exp(tX)\in G\}$$

で定義します．するとこれは線形空間となり，さらに $X,Y\in Lie(G)$ に対し，$[X,Y]:=XY-YX\in Lie(G)$ となることが知られています．次に，(τ,V) をリー群 G の有限次元表現としたとき，付随するリー環 $Lie(G)$ の表現 $(d\tau,V)$ を**式 (11)** により定めると，$X,Y\in Lie(G)$，a，$b\in\mathbb{R}$ に対し，$d\tau(aX+bY)=ad\tau(X)+bd\tau(Y)$ かつ $d\tau([X,Y])=d\tau(X)d\tau(Y)-d\tau(Y)d\tau(X)$ が成立します．このようにつくった表現 $(d\tau,V)$ は元の表現 (τ,V) の情報をほとんど保持しています．例えば，もし G が連結ならば，有限次元表現 (τ,V) が G の表現として既約であることと，その微分表現 $(d\tau,V)$ が $Lie(G)$ の表現として既約であることは同値になります．

例として，$G=SU(2):=U(2)\cap SL(2,\mathbb{C})$ の $V=\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^2)$ への表現を考えましょう．今，$G=SU(2)$ に付随するリー環 $Lie(G)=\mathfrak{su}(2)$ およびその複素化 $Lie(G)\otimes\mathbb{C}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ は**式 (12)** で与えられます．$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底として $H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$F=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ を取ると，これらの $\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^2)$ への作用は**式 (13)** となります（途中式を**図 3** に示します）．特に $\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^2)$ の基底として $\{x^k,x^{k-1}y,x^{k-2}y^2,\dots,y^k\}$ を取ったとき，これらの作用は**式 (14)** となります．したがって $d\tau(H)$ の固有値の全体は $\{k,k-2,k-4,\dots,-k\}$ となり，$d\tau(E)$ は $d\tau(H)$ の固有ベクトルの固有値を 2 上げ，逆に $d\tau(F)$ は固有値を 2 下げることが分かります．これは量子力学におけるスピン表現と同値なものです．実は一般に $SU(2)$ の既約表現は必ずこのような構造を持ち，特にある非負整数 k について $\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^2)$ と同値になることが示せます．より難しい例として，リー群 $U(n)$ の表現を考えた場合にも，付随するリー環（の複素化）の作用を対角行列，上

$$W_m:=\left\{\|x\|^{k-m}\tilde{P}_k^m\left(\frac{x_n}{\|x\|}\right)f(x_1,\dots,x_{n-1})\ \middle|\ f(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathcal{H}_m(\mathbb{C}^{n-1})\right\}\subset\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^n) \tag{9}$$

$$\mathcal{H}_k(\mathbb{C}^n)|_{O(n-1)}=\bigoplus_{m=0}^{k}W_m\simeq\bigoplus_{m=0}^{k}\mathcal{H}_m(\mathbb{C}^{n-1}) \tag{10}$$

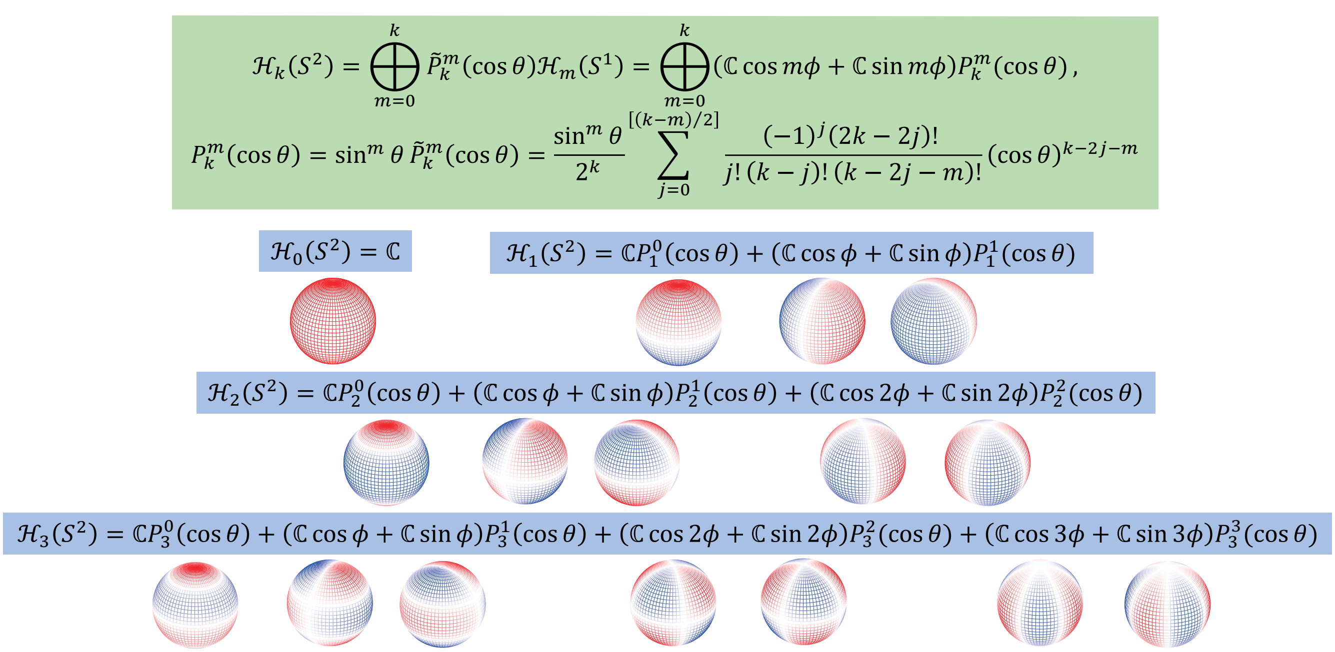


図 2　$\mathcal{H}_k(S^2)=\mathcal{H}_k(\mathbb{C}^3)|_{S^2}$ を $\mathcal{H}_m(S^1)=\mathcal{H}_m(\mathbb{C}^2)|_{S^1}$ の和で表す

$$d\tau(X)v := \frac{d}{dt}\tau(\exp(tX))v|_{t=0} \qquad (X \in Lie(G), v \in V) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} Lie(G) &= \mathfrak{su}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a, b, c \in \mathbb{C}, \\ a = -\bar{a}, b = -\bar{c} \end{array} \right\}, \\ Lie(G) \otimes \mathbb{C} &= \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &d\tau(H)f(x,y) = \left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y), \\ &d\tau(E)f(x,y) = x\frac{\partial}{\partial y}f(x,y), \quad d\tau(F)f(x,y) = y\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} d\tau(H)f(x,y) &= \frac{d}{dt}f\big((x,y)\exp(tH)\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f\left((x,y)\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\right)\Big|_{t=0} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y), \\ d\tau(E)f(x,y) &= \frac{d}{dt}f\big((x,y)\exp(tE)\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f\left((x,y)\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Big|_{t=0} = x\frac{\partial}{\partial y}f(x,y), \\ d\tau(F)f(x,y) &= \frac{d}{dt}f\big((x,y)\exp(tF)\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f\left((x,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\right)\Big|_{t=0} = y\frac{\partial}{\partial x}f(x,y). \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} 0 & x^k \arrow[l, "E"'] \arrow[loop above, "H \atop \times k"] \arrow[r, shift right, "F"'] & x^{k-1}y \arrow[l, shift right, "E"'] \arrow[loop above, "H \atop \times k-2"] \arrow[r, shift right, "F"'] & x^{k-2}y^2 \arrow[l, shift right, "E"'] \arrow[loop above, "H \atop \times k-4"] \arrow[r, shift right, "F"'] & \cdots \arrow[l, shift right, "E"'] \arrow[r, shift right, "F"'] & xy^{k-1} \arrow[l, shift right, "E"'] \arrow[loop above, "H \atop \times -k+2"] \arrow[r, shift right, "F"'] & y^k \arrow[l, shift right, "E"'] \arrow[loop above, "H \atop \times -k"] \arrow[r, "F"'] & 0 \end{tikzcd}$$

図3　$SU(2)$のリー環の$\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^2)$上の表現

$$\begin{gathered} d\tau(H)x^{k-j}y^j = (k-2j)x^{k-j}y^j, \qquad d\tau(E)x^{k-j}y^j = jx^{k-j+1}y^{j-1}, \\ d\tau(F)x^{k-j}y^j = (k-j)x^{k-j-1}y^{j+1} \end{gathered} \tag{14}$$

$$\{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n\} \tag{15}$$

$$Lie(G) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \tag{16}$$

$$d\tau(H)f := x\frac{df}{dx} + \frac{1}{2}f, \qquad d\tau(E)f = -\frac{i}{2}x^2 f, \qquad d\tau(F)f = -\frac{i}{2}\frac{d^2 f}{dx^2} \tag{17}$$

$$\left(\tau\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}f\right)(x) = \left(\tau\left(\exp\frac{\pi}{2}(E-F)\right)\right) = \frac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{-ix\xi}d\xi. \tag{18}$$

三角行列，下三角行列のそれぞれについて詳しくみることにより，$U(n)$ の既約表現の全体が，単調減少な n 個の整数の組（**式(15)**）と一対一に対応することが示せます．このようにリー環の表現はリー群の表現を分類するうえで役立ちます．さらに$U(n)$の各既約表現の次元は，半標準ヤング盤(semistandard Young tableaux) と呼ばれる組合せ論的対象の個数で特徴付けられることも知られています．

無限次元表現の例

ここまでは有限次元表現を中心にみてきましたが，無限次元表現の例についてもみてみましょう．今リー群$G = SL(2, \mathbb{R})$ を考えると，付随するリー環 $Lie(G) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ は**式(16)**で与えられます．$H, E, F \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ を前述のものと同様に取り，$V = L^2(\mathbb{R})$（のある稠密部分空間）への $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の作用$d\tau$を**式(17)**で定めます．すると，これはリー群$SL(2, \mathbb{R})$ の表現には持ち上がりませんが，その二重被覆群 $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ には持ち上がる〔すなわち，$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$の表現 ($\tau$, $L^2(\mathbb{R})$) で，その微分が（ある稠密部分空間上で）上述の $d\tau$ に一致するものがある〕ことが知られています．さらに$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \exp\frac{\pi}{2}(E-F)$ $\in \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ の作用がフーリエ変換の定数倍に一致します（**式(18)**）．これは $d\tau(E-F) = -\frac{i}{2}\left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)$（量子調和振動子）の固有関数を考察することで示せます．この表現 (τ, $L^2(\mathbb{R})$) は無限次元ながら既約に近い表現*2であり，ヴェイユ表現，メタプレクティック表現などと呼ばれます．この構成はより大きなリー群 $Sp(n, \mathbb{R})$ の表現 $L^2(\mathbb{R}^n)$に一般化されます（$n=1$の場合$Sp(1, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})$）．さらに $Sp(nm, \mathbb{R})$の表現$L^2(\mathbb{R}^{nm}) \simeq L^2(M(n, m; \mathbb{R}))$ ($n \times m$行列上の関数空間）を部分群 $Sp(n, \mathbb{R}) \times O(m)$ $\subset Sp(nm, \mathbb{R})$ のもとで既約分解することにより，$Sp(n, \mathbb{R})$ の多彩な表現を得ることができるなど，ヴェイユ表現は表現論の中でも特に重要視されています．

＊2　偶関数，奇関数の全体がそれぞれ既約表現であり，$L^2(\mathbb{R})$は2つの既約表現の和になります．

<u>定義</u>:

$$Sp(n,\mathbb{R}) \coloneqq \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2n,\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^t g \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\simeq \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in GL(2n,\mathbb{C}) \,\middle|\, {}^t g \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

($n = 1$ のとき, $Sp(1,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R}) \simeq SU(1,1)$),

$D_n \coloneqq \{x \in M(n,\mathbb{C}) \mid {}^t x = x, I - x\bar{x}$ は正定値$\}$, $\mathcal{O}(D_n) \coloneqq \{D_n$ 上の正則関数$\}$.

$Sp(n,\mathbb{R})$ の $\mathcal{O}(D_n) = \mathcal{O}_\lambda(D_n)$ 上の表現 τ_λ を以下で定める ($\lambda \in \mathbb{C}$).

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}^{-1} \in Sp(n,\mathbb{R}), \qquad \tau(g)\colon \mathcal{O}_\lambda(D_n) \to \mathcal{O}_\lambda(D_n),$$

$$(\tau(g)f)(x) \coloneqq \det(\bar{b}x + \bar{a})^{-\lambda} f\left((ax+b)(\bar{b}x+\bar{a})^{-1}\right).$$

$$\begin{array}{ccc} Sp(2n,\mathbb{R}) & \supset & Sp(n,\mathbb{R})\times Sp(n,\mathbb{R}) \\ \mathcal{O}_\lambda(D_{2n}) & \underset{\mathcal{F}^\downarrow}{\overset{\mathcal{F}^\uparrow}{\rightleftarrows}} & \mathcal{O}_{\lambda+k}(D_n) \otimes \mathcal{O}_{\lambda+k}(D_n) \end{array}$$

$Sp(2n,\mathbb{R})$ の表現 $\mathcal{O}_\lambda(D_{2n})$ を部分群 $Sp(n,\mathbb{R})\times Sp(n,\mathbb{R})$ に制限すると,
$\mathcal{O}_{\lambda+k}(D_n) \otimes \mathcal{O}_{\lambda+k}(D_n)$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) と同値な表現が直和成分に現れる. しかしその入り方はこれまで未知だった.
筆者は, 両者の対応（絡作用素）が以下の微分作用素で与えられることを示した.

$$\mathcal{F}^\uparrow\colon \mathcal{O}_{\lambda+k}(D_n) \otimes \mathcal{O}_{\lambda+k}(D_n) \to \mathcal{O}_\lambda(D_{2n}), \qquad \mathcal{F}^\uparrow f(x) = F^\uparrow\left(x_{12}; \frac{\partial}{\partial x_{11}}, \frac{\partial}{\partial x_{22}}\right) f(x_{11}, x_{22}),$$

$$\mathcal{F}^\downarrow\colon \mathcal{O}_\lambda(D_{2n}) \to \mathcal{O}_{\lambda+k}(D_n) \otimes \mathcal{O}_{\lambda+k}(D_n), \qquad \mathcal{F}^\downarrow f(x_{11}, x_{22}) = F^\downarrow\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)\Big|_{x_{12}=0},$$

$$F^\uparrow(x_{12}; y_{11}, y_{22}) \coloneqq \det(x_{12})^k \sum_{m_1 \geq \cdots \geq m_n \geq 0} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(\lambda + k - (j-1)/2)_{m_j}} \Phi_{\boldsymbol{m}}(y_{11} x_{12} y_{22} {}^t x_{12})$$

$$F^\downarrow(x) = F^\downarrow\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ {}^t x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \coloneqq \det(x_{12})^k \sum_{m_1 \geq \cdots \geq m_n \geq 0} \prod_{j=1}^{n} \frac{(-(k+j-1)/2)_{m_j} (-(k+j-2)/2)_{m_j}}{(-\lambda - k + n - (j-3)/2)_{m_j}} \Phi_{\boldsymbol{m}}(x_{11} {}^t x_{12}^{-1} x_{22} x_{12}^{-1}).$$

$\Phi_{\boldsymbol{m}}$:固有値のみに依存するある $m_1 + \cdots + m_n$次斉次多項式（$n = 1$ のとき, $\Phi_{\boldsymbol{m}}(t) = t^m/m!$）

$(\lambda)_m \coloneqq \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+m-1)$

図 4　筆者が得た結果の一例

無限次元表現の分岐則

筆者は現在の研究として，無限次元表現の分岐則を具体的に記述することに関心を持っています[3]．リー群 G の“良い”無限次元表現 (τ, V) を部分群 $G' \subset G$ に制限すると，V は G' の（一般には無限個の）既約表現の直和（または直積分）に分解されます．このとき，抽象的に G' のどの表現 V' が分解に現れるかが分かったとしても，その具体的な入り方まで決定するのは一般には難しい問題です（$\mathcal{H}_k(\mathbb{C}^n)$ の例における $\tilde{P}_k^m(y)$ の決定に相当）．筆者は素性の良い (G, G', V, V') に対して，V' の V への入り方（絡作用素，intertwining operator）を具体的に決定しました[4],[5]（**図 4**）．そこには超幾何関数をはじめとする特殊関数（の多変数化）が現れます．今後はより一般の (G, G', V, V') に対して同様の結果を得ることを目標としています．

■参考文献

(1) 小林・大島：“リー群と表現論，” 岩波書店，2005.

(2) 野村：“球面調和函数と群の表現，” 日本評論社，2018.

(3) T. Kobayashi : “A program for branching problems in the representation theory of real reductive groups,” Representations of reductive groups, Progr. Math., Vol. 312, pp. 277-322, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

(4) R. Nakahama: “Construction of intertwining operators between holomorphic discrete series representations,” SIGMA Vol. 15, No. 36, p. 101, 2019.

(5) R. Nakahama: “Computation of weighted Bergman inner products on bounded symmetric domains and restriction to subgroups,” SIGMA Vol. 18, No. 33, p. 105, 2022.

中濱　良祐

本稿では長さの制約もあり，リー群の表現論のごく一部にしか触れませんでしたが，この分野にはほかにも多くの魅力的な話題があります．拙文ではありますが，少しでもこの分野が面白いと思っていただけたら幸いです．

◆問い合わせ先

NTTコミュニケーション科学基礎研究所
企画担当
TEL　0774-93-5020
FAX　0774-93-5026
E-mail　cs-jousen-ml@ntt.com

URL　https://journal.ntt.co.jp/article/27018
DOI　https://doi.org/10.60249/24075007

保型形式とフーリエ展開

フーリエ解析は現代社会においてなくてはならない技術ですが，数学においても同様です．本稿では，保型形式の歴史を振り返りながら，表現論とフーリエ解析そして保型形式のかかわりについて考察します．難しい用語の説明は脚注にとどめ，概念間の関係性に注目しました．最後に，現代の保型形式論に残り続ける困難について述べ，その課題と著者の研究の関係について議論します．

キーワード：#保型形式，#フーリエ解析，#表現論

堀永（ほりなが）　周司（しゅうじ）

NTT基礎数学研究センタ

保型形式の歴史と課題

■保型形式の誕生

保型形式*1は，1800年ごろの楕円関数の研究に起源をもちます．当時は天文学が急速に発展している時節であり，天体観測技術が大幅に高精度化され始めていました．天体は楕円軌道を描くため，その周長を考える必要が出てきます．円の周長は円周率から容易に計算可能ですが，楕円の場合は大変難しく，（第二種）楕円積分を考える必要があります．ルジャンドル，ガウスやアーベルらによる研究を通じて，楕円積分は単に楕円の周長というだけでなく，現代の数学へと通ずる非常に興味深いものへと変貌していきました．その１つがテータ関数です．テータ関数は現在さまざまな数学に現れます．本稿のメインテーマである保型形式の一例でもありますし，そのほか楕円曲線や整数論においても現れます（**図１，２**）．別の応用として，1800年代後半に活躍したクロネッカーはテータ関数を用いて虚二次体の類体の構成を行いました．この仕事は「クロネッカーの青春の夢」と呼ばれ，現在ヒルベルトの第十二問題*2と関係する大変重要な結果です．このようにして，保型形式は具体例の研究を主としながら1800 年代に誕生しました．

■保型形式論の発展と課題

さらなる保型形式の発展には，ヒルベルトの学生であったヘッケの仕事を待たなければいけませんでした．もちろん，ヘッケ以前にもラマヌジャンなどによる仕事は多々あります．ヘッケはそれらをまとめ，保型形式論というものに落とし込みました．特に，ヘッケの仕事とリーマンゼータ関数の場合を基に保型形式からゼータ関数・L関数が定義され，現代的な保型形式論への道筋が大きく拓かれました．そして，ラングランズらを通じて保型表現論へと発展しました．また，保型形式の歴史を振り返るうえで谷山-志村予想は欠かせないでしょう．谷山-志村予想は保型形式と楕円曲線をつなぐ深遠な予想です．ワイルズは谷山-志村予想の半安定という場合を解決し，フェルマ予想を完全に証明しました．現在では谷山-志村予想も完全に解決しており，その発展であるパラモジュラ予想も解決されてきています．これら予想の定式化には保型表現が欠かせません．そして，保型表現の研究が本質的な役割を果たしています．

谷山-志村予想は解析的な対象である保型形式と幾何的な対象である楕円曲線を結ぶものでした．ラングランズや志村をはじめとする多くの研究者による膨大で緻密な研究を通じて，谷山-志村予想は当初の姿を大きく超え，代数・幾何・解析の統一理論といった様相を呈してきています．しかしながら，保型形式論には依然として残る大きな課題があります．それは非正則な保型形式論の研究です．谷山と志村は，正則保型形式のフーリエ係数の計算結果が多数知られていることを基に，谷山-志村予想を定式化できました．しかし，非正則な保型形式ついてはそのフーリエ係数の例すらもほとんど知られていません．そのような例の不足がさらなる発展の障害となっています．谷山-志村予想や球面充填問題*3のように，非正則な保型形式が多様な応用を持つことは想像に難くありませんが，保型形式側の発展が不足しています．本稿では，フーリエ展開と表現論のかかわりを確認し，その発展ともいえるラングランズ予想やアーサー予想に触れ，最後に非正則な保型形式のフーリエ展開に関する著者と早稲田大学成田宏秋教授との共同研究について紹介します．

フーリエ展開と表現論

■フーリエ展開

フーリエ展開やフーリエ変換という言葉を耳にした人は多いのではないでしょうか．フーリエ変換は1800年ごろ熱伝導方程式を解くためにフーリエによって導入されました．それらは現代社会に必須の技術の１つであり，例えば，音の信号を処理する際によく用いられます．どんな複雑な音でも，

＊1　保型形式：存在するかすらも当たり前ではない強烈な変換則を持った関数です．後に定義を行いますが，定義からはすぐには分からない整数論的に大変興味深い性質を多々持っています．

＊2　ヒルベルトの第十二問題：ドイツ人数学者ダフィット・ヒルベルトが1900年に提示した23の問題の1つです．それらは現在の数学の基礎の形成に大きな役割を果たしました．ヒルベルトの提示から 100年以上経った今でも，それら問題のうち完全に解決したものは半分もありません．

＊3　球面充填問題：同じ半径の球を使って空間をどの程度埋め尽くすことが可能か，という問題です．マリナ・ヴィヤゾフスカは 8 次元と24次元の場合に当問題を保型形式を用いて解決し，2022年にフィールズ賞を獲得しました．

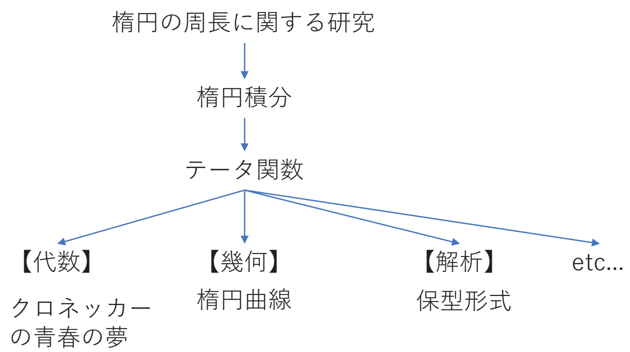


図１　楕円の周長の研究から，現代数学において重要な相互に関連する概念・対象が見出された

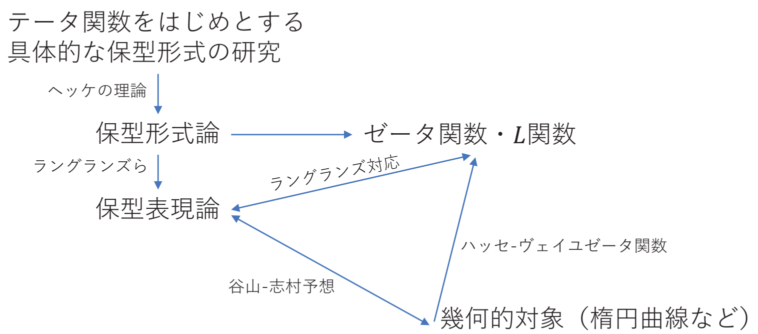


図２　保型形式，ゼータ関数・L関数，幾何的対象

テレビやラジオの時報の音のような単純な音を混ぜていくことでつくれる，というのがその考え方です．この単純な音は数学的には sin関数やcos関数などの三角関数です．数学的には，フーリエ展開は周期関数をsinやcosの無限和に展開することを指し，フーリエ変換はその展開に現れる係数を指します．そして，フーリエ展開は数学において現代でさえも，技術的・理論的側面の両面において重大な役割を果たしています．

まずはフーリエ解析と表現論のかかわりについて観察しましょう．フーリエ展開やフーリエ変換は，周期関数への平行移動を通じて周期関数全体を理解しようという取り組みであるといえます．それらを明確にするために，数学的な詳細に立ち入っていきましょう．f を実数 $\mathbb{R}$ 上の複素数値関数とします．f が周期１を持つとは，$f(x+1)=f(x)$となることをいいます．ゆえに，周期関数は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の関数と考えることができます．このような周期関数 f を三角関数$\sin(x)$，$\cos(x)$を用いて表すのがフーリエ展開の理論です．もっと精密には，$e^{2\pi\sqrt{-1}nx}=\cos(2\pi nx)+\sqrt{-1}\sin(2\pi nx)$ を通じて

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx}$$

という無限個の和に関数 f を分解することを f のフーリエ展開といいます．現れる係数a_nがフーリエ係数です．a_n は f のフーリエ変換 $\mathcal{F}f$を用いて$\mathcal{F}f(n)$とも表されます．表現論では，周期関数のような性質を持った数学的な対象たちを，より細かい性質をもって切り分けることを行います．典型的な例として，行列のベクトル空間への作用を考えましょう．その行列の作用を固有値と固有ベクトルに分けることで，もともとの行列に対する理解が大きく進みます．このような，行列から固有値や固有ベクトルを得るような一連の大きな枠組みが表現論の１つの側面です．

では，フーリエ解析と表現論について観察しましょう．上記の表現論の考え方に照らし合わせますと，ベクトル空間として周期関数全体，作用する行列として以下で述べる平行移動というものを考えます．周期関数 f に対して実数 $y\in\mathbb{R}$ による平行移動 $(r_y f)(x)=f(x+y)$ を考えると，平行移動した関数 $r_y f$ のフーリエ展開の n 番目のフーリエ係数は $a_n e^{2\pi\sqrt{-1}ny}$ に一致します．

つまり，yに関する平行移動がなす作用は，$x\mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}nx}$ という関数を固有ベクトル，$e^{2\pi\sqrt{-1}ny}$を固有値としていると考えられます．まとめると，周期関数とそのフーリエ展開に平行移動という表現を組み合わせることで次が対応することが結論付けられます．

- $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の表現で $y\mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}ny}$ と表されるもの
- 周期関数のフーリエ展開に現れる n 番目の項

表現という一見するとよく分からないものと関数を結び付けることにより，表現の１つのカオをとらえることができました．この驚くべき対応は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ というシンプルな群だけでなく，より広い枠組みでとらえることが可能です．その様子を次で観察しましょう．

■フーリエ解析からラングランズ予想へ

関数を通じた表現の理解は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ という周期関数に対応する場合は深く理解が可能でした．その理由は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ がコンパクトという性質を持っていることに由来します．非コンパクトな対象，例えば実数全体 $\mathbb{R}$ では積分の収束をはじめとする技術的困難から数学的に大変に難しくなっていきます．その様子は，フーリエ解析の本において，周期関数のフーリエ解析と実数 $\mathbb{R}$ 上の関数のフーリエ解析では扱いの差からも理解可能です．これらの差異は主に $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ はコンパクトであり $\mathbb{R}$ は非コンパクトであるという数学的事実から来ているのです．

非コンパクト群の表現論を大きく進めた立役者の１人がハリシュチャンドラです．ハリシュチャンドラは，主にリー群という $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を含む群を扱いました．特に顕著な仕事としては，離散系列表現の分類が挙げられます．それは，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ では関数空間を考えたように，非コンパクト群 G に対して $L^2(G)$ という G の自乗可積分関数全体＊4とそれ上の平行移動を考えた際に自然に現れるものです．これらの対応は表現の行列係数＊5を通じて得られます．このように，表現論は関数空間とその解析を背景として

＊4　自乗可積分関数全体：$\int_G |f(x)|^2\,dx<+\infty$となる関数 f 全体．

＊5　表現の行列係数：表現は一般に無限次の行列より実現されます．その行列の成分を行列係数といいます．

表　表現の分類と構成方法

	分類	行列係数の性質	構成方法
離散系列表現	ハリシュチャンドラ	自乗可積分関数	行列係数による L^2 空間への実現
緩増加表現	ナップ-ザッカーマン	緩増加関数	放物型誘導表現
ユニタリ表現	未分類	定義可能	一般には知られていない
既約表現	ラングランズ	一般には定義できない	放物型誘導表現のラングランズ商

大きく発展しました．ハリシュチャンドラの仕事を基本として，ナップとザッカーマンはリー群の緩増加表現の分類を行い，それを土台としてラングランズは一般の既約表現の分類を行いました（**表**）．このラングランズの分類を端的にラングランズ分類といいます．リー群とは実数$\mathbb{R}$や複素数$\mathbb{C}$上での理論ですから，整数論の研究者は実数の類似であるp進数体$\mathbb{Q}_p$などでの類似の理論を渇望していました．

さまざまな試行錯誤を通じ，p進数体上の群の既約表現の分類に関する予想である局所ラングランズ予想が定式化されていきました．局所ラングランズ予想とは，連結簡約代数群*6 Gに対する次のような対象の間の対応です：

$\{G$ の既約表現$\} \longrightarrow \{G$ の L パラメータ$\}$

右辺のLパラメータという部分が数論的な対象であり，L関数を定めます．本特集記事『数論・代数幾何・表現論が紡ぐ数学の世界』(1)にあるとおりラングランズ予想は非可換類体論としての側面を持つのですが，それが右辺のLパラメータの部分に現れているのです．現在，局所ラングランズ予想は大きく進展してきており，内視鏡的分類の理論（endoscopic classification）などのより精密な予想へと発展してきています．そして，p進体上の群の表現論と保型形式は切っても切り離せません．事実，互いに短所を補い合いながらともに発展してきた歴史があります．最後に，保型形式のフーリエ展開と非正則な保型形式に関する著者の結果について述べていきましょう．

保型形式と表現論

■正則保型形式のフーリエ展開

正則保型形式のフーリエ展開・フーリエ係数について観察します．$\mathfrak{H}$を上半平面*7とします．このとき，$\mathfrak{H}$に対して特殊線型群$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$*8が一次分数変換*9で作用します．次に，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$の中で成分がすべて整数のものを$\Gamma$と表しましょう．$j$を保型因子*10とします．$k$を整数とし，$f$を$\mathfrak{H}$上の正則関数とします．このとき，$f$が重さ$k$の$\Gamma$に関する保型形式*11とは，$z \in \mathfrak{H}$, $\gamma \in \Gamma$ に対して $f(\gamma(z)) = j(\gamma, z)^k f(z)$ となることをいいます．つまり，Γの作用について完全に不変ではなく，多少のお釣り$j(\gamma, z)^k$が出てくるような関数です．特に，$f(z+1) = f(z)$ が分かりますから，虚部yを固定するごとにフーリエ展開が可能です．fが正則関数であることから，コーシーの積分公式を通じ，以下のフーリエ展開が可能です：

$$f(x + \sqrt{-1}y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi\sqrt{-1}n(x+\sqrt{-1}y)}$$

驚くことに，この表示であれば係数a_nは虚部yに依存しません．この展開式をfのフーリエ展開，a_nを保型形式fのフーリエ係数といいます．

■保型形式と表現論

関数空間への平行移動が表現論と強くかかわることを前述のフーリエ展開で観察しました．同様の事象が保型形式でも発生します．つまり，保型形式をリー群の商空間上の関数へ持ち上げることが可能です．それにより保型形式fを持ち上げた関数φ_fは$C^\infty(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$の元となります．フーリエ展開で観察したように，この空間は$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$の平行移動を考えることが可能ですから，リー群$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$の表現論と関連します．さらに進めると，有理数体$\mathbb{Q}$のアデール環$\mathbb{A}$と呼ばれるものを用いて，保型形式はアデール群$\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$上の滑らかな関数$\varphi_f$となります．$f$が自乗可積分であるならば，少なくとも尖点形式ならば，$L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}))$の元 φ_f です．つまり，自乗可積分な保型形式 f から自乗可積分関数の空間$L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}))$の元が自然に得られ，その関数空間にはフーリエ解析の場合と同様にリー群$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$や$p$進体上の群$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$の表現論が現れるのです．この現象はフーリエ変換と表現論の結び付きの際に現れたものと同じ現象です（**図3**）．現代の保型形式論では，$L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}))$の$\mathrm{SL}_2$の部分を連結簡約代数群に一般化して考えます．ハリシュチャンドラが離散系列表現を考えたように，$L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}))$にも離散的な部分を考えることができます．その離散的な部分の記述が現在の保型形式論を用いると可能になってきました．それには，ラングランズの学生であったアーサーやシェルスタッドらによる研究が土台となっています．特に，アーサーは離散部分の記述であるアーサー予想を定式化し，群が斜交群や分裂直交群の場合に予想を適切な修正の下で証明しました．その研究は現在の保型形式論における最高峰の1つといってよいでしょう．現在，アーサーの仕事の拡張や応用が盛んに研究されています．

■保型形式のフーリエ展開の一般化に向けて

上半平面上の正則保型形式はフーリエ係数が定数となっています．しかし，この点はfが正則という事実に強く依存しています．そのため，正則性を除いたとき，そのフーリエ展開は

$$f(x + \sqrt{-1}y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(y) e^{2\pi\sqrt{-1}nx}$$

として係数$a_n(y)$がyに依存したかたちでしか書き下すことができません．そのため，

---

*6　連結簡約代数群：代数群とは代数多様体であり群となるものです．連結とは代数多様体としての連結性を意味し，簡約とは群のクラスを指します．例えば一般線形群や直交群やユニタリ群は連結簡約代数群となっています．しかし，上三角行列などは簡約群ではありません．

*7　上半平面：複素数のうち虚部が正のもの全体．

*8　特殊線型群：2 × 2の実数係数行列で行列式が1であるもの全体．

*9　一次分数変換：$z \in \mathfrak{H}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$に対して$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z) = (az + b)(cz + d)$ としたもの．

*10　保型因子：$z \in \mathfrak{H}, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(R)$ に対して $j(\gamma, z) = cz + d$ としたもの．

*11　保型形式：厳密には，この定義では保型形式にはならず，準保型形式というものにしかなりません．準保型形式fが保型形式とは，fのn番目のフーリエ係数a_nが$n < 0$のとき$a_n = 0$をなすことをいいます．

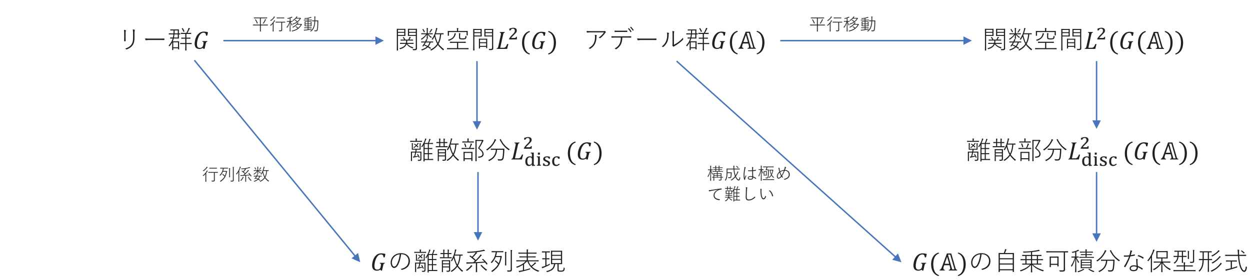


図 3　「局所」と「大域」の比較

$$f(x+\sqrt{-1}y) = \sum_{h\in M_2(\mathbb{Q}),\ {}^t h=h} a_h(y)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}(hx)},\quad x+\sqrt{-1}y \in \mathfrak{H}_2 \qquad (1)$$

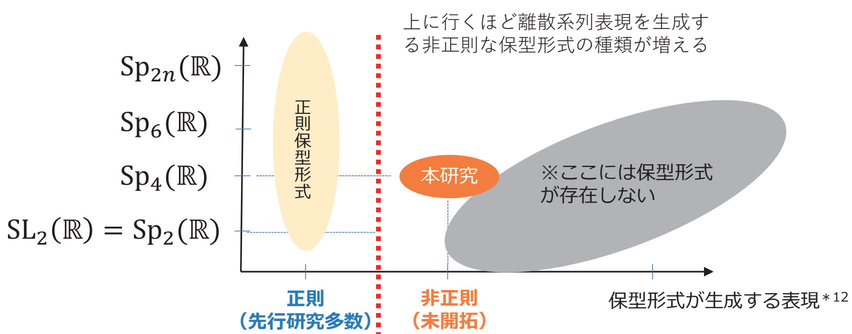


図 4　自身の研究の立ち位置

係数$a_n(y)$の研究は大変な困難を伴います．著者と成田氏との共同研究(2)では，このような非正則な保型形式のフーリエ展開やフーリエ係数を扱いました．非正則な保型形式として典型的なものの 1 つはマース形式と呼ばれるものですが，それを扱わずに，より表現論的に自然な保型形式＊12を考察したというのがポイントです．そのために，ハリシュチャンドラの離散系列表現の分類を考えてみましょう．これまで述べてきた上半平面上の保型形式とは$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$に対応する保型形式です．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$に対する離散系列表現はある意味で 1 つしかありません．マース形式の難しい点の 1 つは，そういった離散系列表現という素性の良い表現に対応しない部分ではないかと考えたのです．では，正則なものに対応しない離散系列表現を持つものは何か，というと，例えば次数 2 の斜交群 $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$があります．$\mathrm{Sp}_4$の場合はある意味で離散系列表現は 2 種類あり， 1 つは正則なものに対応しており，もう片方が非正則なものとなります．また，Sp_4 は離散系列表現を複数持つ群のうち，もっとも小さいものと考えることができます．Sp_4上の保型形式は，次数 2 のジーゲル上半平面＊13 $\mathfrak{H}_2$上の関数 f に対応し，フーリエ展開を持ちます．

式 (1) のフーリエ係数部分に現れる$a_h(y)$を一般化ホイッタッカー関数といいます．正則保型形式の場合と異なり，もはや定数とはなりません．離散系列表現を考える際の重要なポイントは$a_h(y)$の考察に微分方程式を導入できる点にあります．共同研究では，その微分方程式の解の性質を通じ，$a_h(y)$の諸性質を導きました．応用として，Sp_4 の非尖点的保型形式で，$\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$上の表現として離散系列表現を生成するものを完全に記述しました．**図 4** にあるとおり，非正則な保型形式を構成方法も含めて記述する研究として，本研究は最初の一歩を踏み出したものとなっています．現在は，フーリエ展開の記述の次の仕事，つまりフーリエ係数の記述を考察しています．離散系列表現に対応する保型形式のフーリエ係数の具体的な考察を通じ，L 関数の整数論的な性質を導くことを目標に，研究を推進しています．

＊12 保型形式と表現：これまで述べたとおり，保型形式はそれを群上の関数に持ち上げることで表現に対応します．対応先の表現をσとしたとき，保型形式はσを生成するといいます．

＊13 ジーゲル上半平面：$\mathfrak{H}_2=\{z=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}(z)\text{は正定値行列}\}$と定義される空間．

■参考文献

(1) 佐野・宮﨑・若山："数論・代数幾何・表現論が紡ぐ数学の世界，" NTT技術ジャーナル，Vol.36，No.7，pp.10-15，2024.
(2) S. Horinaga and H. Narita: "Cuspidal components of Siegel modular forms for large discrete series representations of $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$" manuscripta mathematica, pp.1-44，2023.

堀永　周司

フーリエ解析は現代社会でも，数学においても大変重要な対象です．その中でも表現論とのかかわりは大変興味深く，面白い理論となっています．本稿を通じて興味を抱いた数学用語や分野が 1 つでもありましたら幸いです．

◆問い合わせ先

NTTコミュニケーション科学基礎研究所
企画担当
TEL　0774-93-5020
FAX　0774-93-5026
E-mail　cs-jousen-ml＠ntt.com

URL https://journal.ntt.co.jp/article/27020
DOI https://doi.org/10.60249/24075008

光と物質の相互作用とゼータ関数

量子系における分配関数と対応するスペクトルのゼータ関数を知ることの重要性は，物理と数学のそれぞれにおいて等しいものです．本稿では，光と物質の相互作用の背後に隠れる整数論的な構造を，多様な数学を基盤に相互作用の分配関数とスペクトルゼータ関数の特殊値に着目して考察します．

キーワード：#量子ラビ模型，#非可換調和振動子，#分配関数

Cid Reyes-Bustos
若山（わかやま）　正人（まさと）

NTT基礎数学研究センタ

はじめに

数えることが人類の数学の始まりです．ピタゴラス学派による発見だと推測されますが，文献上はユークリッド原論にあるとおり，2500年前ごろには ①構成的方法による素数の無限性と ②自然数は一意的に素因数分解できることが証明されていました．数論への興味は，ある意味で，整数の単純さ（そう見えること）と，その構成要素である素数の不規則・複雑にみえる構造とのギャップにあります．提示以来165年間未解決なリーマン予想が持つ魅力もここにあります．一方で，光と物質の相互作用を制御することは量子情報における要です．本稿では，そのもっとも基本的な理論モデルである量子ラビ模型[(1)]に着目します．知りたいことはその時間発展です．中でも系の分配関数を知ることが重要です．ところで分配関数のココロは，気体粒子や電子のような個々にはバラバラな状態を持つ（ミクロな）粒子が集まったときの（マクロな）性質を理解したい点にあります．具体的には粒子のとり得るエネルギーに関して重みをつけて足し合わせたものとして分配関数は定義されます．実はリーマンのゼータ関数も，バラバラに存在しているようにみえる各素数のそれぞれが定める幾何級数を素数全体にわたり積（下述のオイラー積）をとったものです．ゼータ関数を精密に観察することによって個々の素数だけを見ていては決して分からない素数の分布が完璧に理解できる，それがリーマン予想です．このように両者には似た考えが詰まっています．しかもそれだけではありません．例えば調和振動子の分配関数とリーマンゼータ関数は具体的につながっています．実際，物理系に対してスペクトルゼータ関数（固有値から定まるディリクレ級数）を考えることは，分配関数を考えることと本質的に同じです．その橋渡しには，歴史的にも相対論と量子力学の構築とともに進歩を遂げた表現論という数学があります．

本稿では，量子相互作用を記述する系の分配関数とスペクトルゼータ関数のつながりをみていくことになりますが，物理系と数論のつながりを楽しんでいただきたいと思います．

以下，整数全体がなす整数環，有理数全体がなす有理数体，実数体，複素数体を，それぞれ $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ で表します．

リーマンゼータとその特殊値，保型形式

調和級数，すなわち正整数の逆数の和が発散することは古くから知られていました．しかし，逆数の平方和の値はどうなのか．1644年にボローニャの数学者メンゴリが提起したこの問いはバーゼル（オイラーの生誕地）の問題と呼ばれ，その答えが $\frac{\pi^2}{6}$ であることをオイラーが発見（1735年）するまでに90年を待ちました．当時，円周率 π が答えに現れたことに人々は大変驚きました．以下のリーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$（親しみを込めてリーマンゼータと呼びます）を使えば，これらは $\zeta(1)=+\infty$, $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ と書かれます．

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=2,3,5,7,\ldots\text{（素数）}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

中央の級数と下段の**オイラー積**をつなぐ等式は，すべての整数が一意に素因数分解されるという事実を表しています．この級数や無限積の絶対収束域は，半平面 $\Re(s) > 1$ ですが，$\zeta(s)$，全複素平面に有理型関数として一意に解析接続され，$s=1$ のみで極（分数関数の分母が 0 になる状況と同じです）を持ちます．オイラーは，$\sin(\pi x)$ の無限乗積とテイラー展開の 2 次の項を比較することでバーゼルの問題を解決したほか，一般の偶数点での値 $\zeta(2n)$ のベルヌーイ数

B_n $\left(\frac{x}{e^x-1} =: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right)$ による表示

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}$$

も発見しました．一方で，奇数点での値についてはそれが無理数であるかどうかさえも分からず歴史が進みました．不明の最初である $\zeta(3)$ の値でさえ，1979年のロジェ・アペリーによる研究[(2)]まで待たねばなりませんでした．アペリーはその後アペリー数と呼ばれる不思議な数列を定義して，$\zeta(2)$ と $\zeta(3)$ の無理数性を同じ方法で示しました．しかし現在でも，一般の奇数点における無理数性はほとんど分かっていません．実際，21世紀になりようやくタンギー・リヴォアルらが $\zeta(2n+1)$ $(n=2,3,\ldots)$ には無理数が無数に存在すること，そして $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \cdots, \zeta(21)$ の中に少なくとも 1 つ無理数が存在することを示しました．その後，ワディム・ズディリンの2001年の論文により $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ の少なくとも 1 つは無理数であることが分かりました．これが現在の地球での最良の理解です．

■素数定理とリーマン予想

ガウスやルジャンドルにより予想されリーマンにより解析的な証明を示唆された次の**素数定理**は，1896年にド・ラ・ヴァレー・プーサンとアダマールにより示されました：$\pi(x)$ を $x(>0)$ 以下の素数の個数とすると

$$\pi(x) \sim Li(x) := \int_2^x \frac{dy}{\ln(y)} \sim \frac{x}{\ln x}.$$

ここで　$f(x) \sim g(x)$　は $f(x)/g(x) \to 1\ (x \to \infty)$ を表しています．それは，$\Re(s)=1$ 上で $\zeta(s) \neq 0$ であることから従うというリーマンのアイデアによるものでした．バラバラにみえる素数の出現分布と $\zeta(s)$ の解析的性質を結びつけたリーマンの発見は，（将来に期待される）リーマン予想の解決よりも数学上の功績が大きいかもしれません．

■リーマンゼータの関数等式

リーマンゼータ $\zeta(s)$ は**関数等式**を満たします．$\Gamma(s)$ をガンマ関数として $\tilde{\zeta}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ とおくと，それは

$$\tilde{\zeta}(1-s) = \tilde{\zeta}(s)$$

という反射式で与えられます．関数等式の味わいは，解析接続の概念がない頃すでにオイラーが手計算で見つけていた

$$\text{“}1+8+27+64+127+\cdots\text{''} = \frac{1}{120}$$

などにもみて取れます．本稿では保型関数・保型形式（モジュラー形式）という非可換な群の作用によって本質的に不変となる関数を取り上げます．三角関数の場合は，平行移動不変性，つまり可換な群 $\mathbb{Z}$ の作用に関する不変性がありますので，保型関数は，三角関数の非可換版だと思うことができます．その紹介のためにも，また，分配関数との関係を述べるうえでもちょうどよいので，以下，上記の関数等式の証明の概略を紹介します．なお，現れる積分や級数は良い意味で収束しているものとします（そのようなものだけを考えます）．関数 f のメリン変換 $\mathcal{M}f$ を次で定義します．

$$\mathcal{M}f(s) := \int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt.$$

例えば $f(t)=e^{-nt}\ (t>0)$ であれば，$\Gamma(s)$ の定義から $\mathcal{M}f(s)=n^{-s}\Gamma(s)$ が分かります．そこで今，級数 $g(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ に対して $h(t)=g(e^{-t})$ と定めてメリン変換を計算すると，容易に $\sum_{n=0}^\infty a_n n^{-s} = \Gamma(s)^{-1}\mathcal{M}f(s)$　と計算できます．そこで複素上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}\ \Im(s)>0\}$ 上で定義される級数 $\theta(z)$ を

$$\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}$$

とすると，$h(t)=\frac{1}{2}\theta(it)$ とおくとき $\tilde{\zeta}(s)=\mathcal{M}f(s/2)$ が分かります．この級数 $\theta(t)$ はヤコビのテータ関数と呼ばれる保型形式です．$\theta(z+2)=\theta(z)$ という平行移動不変性に加えて $\theta(-1/z)=\sqrt{-iz}\theta(z), (z\in\mathbb{H}$ という関係式を満たします．後者は，関数 h のフーリエ変換を $\hat{f}$ と書くときに次のポアソン和公式

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$$

に $f_t(x)=e^{-\pi t x^2}$ という急減少関数を代入することで容易に得られます．$z=it\ (t>0)$ とおけば $\frac{1}{t}\theta\left(\frac{i}{t}\right)=\theta(it)$ ですので，メリン変換の定義に戻れば $\tilde{\zeta}(s)$ の関数等式が得られます．ここで用いたポアソン和公式には，次のような解釈ができます．時計の時刻表示に倣い，整数部分が同じ実数は同じものとみなします．それを $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{R}$ と書いて円だと思いましょう．このとき，右辺はその円周を何回まわっているかの長さ（巻き数）に関する和，左辺は可換群 $\mathbb{R}$ の（既約）表現 $x \mapsto e^{2\pi i y x}$ のうちで $\mathbb{Z}$ 上自明なもの，つまり，$y=m\in\mathbb{Z}$ 全体にわたる和と考えます．左辺は，$\mathbb{R}$ のラプラシアン $\Delta=-\frac{d^2}{dx^2}$ の固有値と考えてもよいものです．この解釈を非可換な群とその離散部分群に拡張したものが，セルバーグの跡公式と呼ばれるものです〔$\mathbb{R}$ のような可換群の既約表現はつねに1次元であり，表現の指標（トレース）は表現そのものです〕．

■モジュラー形式・保型形式

各成分が整数（実数）であり行列式の値が1の2行2列の行列全体がなす群を $SL_2(\mathbb{Z})$（$SL_2(\mathbb{R})$）とします．$SL_2(\mathbb{Z})$ は，2つ $S=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ と $T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ で生成されています〔各元が S と T のいくつかの（非可換な）積で表示されるという意味です〕．さて $g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$　は一次分数変換 $z \mapsto g.z := \frac{az+b}{cz+d}\ (z\in\mathbb{H})$ により上半平面 $\mathbb{H}$ に作用します．$\pm\mathbf{1}$ は同一の作用を定めるため，モジュラー群 $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) := SL_2(\mathbb{Z})/\pm\mathbf{1}$ に対し，Γ の元の作用で移り合う $\mathbb{H}$ の点を同一視した空間 $\Gamma\setminus\mathbb{H}$ を考えます．これが，モジュラー形式（保型形式）が住む空間です．ただしここでは，$\pm\mathbf{1}$ の区別は気にしないでおきます．上記の $\theta(z)$ は，ちょうど S, T^2 で生成される $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma(2)$（$\cong \Gamma_0(4)$）の作用で（ほぼ）不変な関数であるため，$\Gamma(2)$-保型形式と呼ばれるものになっています．

相互作用模型

■量子ラビ模型

量子ラビ模型（Quantum Rabi model: QRM）は光と物質の相互作用の基本モデルです．そのハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{Rabi}} := a^\dagger a + \Delta\sigma_z + g\sigma_x(a^\dagger + a).$$

ここで $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{d}{dx}\right)$, $a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{d}{dx}\right)$, は角振動数 $\omega(=1)$ の調和振動子（ボゾンモード：光子）に対する生成消滅演算子，$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ は2準位系に対するパウリ行列，$g>0$ は2準位系と光子間の結合強度，$2\Delta>0$ は2準位間のエネルギー差です．H_{Rabi} は2次元ベクトル値2乗可積分関数がなすヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}^2$ に作用します．H_{Rabi} にバイアス項をつけた $H^{\epsilon}_{\mathrm{Rabi}} := H_{\mathrm{Rabi}} + \epsilon\sigma_x\left(\epsilon\in\mathbb{R}\right)$ は，非対称量子ラビ模型（asymmetric QRM: AQRM）を定めます．これらは共振器量子電磁力学の手法による深強結合状態の実現のための実験測定結果を予言しました[3]．

■非可換調和振動子

非可換調和振動子（NCHO：Non commutative harmonic oscillator）[4],[5] はハミルトニアンで定まる常微分方程式系です（**式(1)**）．Q は $\alpha, \beta > 0$, $\alpha\beta > 1$ のと

表　スペクトラルゼータ関数の特殊値の整数論的な構造

	非可換調和振動子のスペクトルゼータ			リーマンゼータ (調和振動子のスペクトルゼータ)			
	$\zeta_Q(2)$	$\zeta_Q(3)$	$\zeta_Q(n)$	$\zeta(2)$	$\zeta(3)$	$\zeta(2n)$	$\zeta(2n+1)$
特殊値 (正整数)	楕円積分表示 (Gauss超幾何)	代数関数による 積分表示	代数関数による 積分の和	$\frac{\pi^2}{6}$	無理数	ベルヌーイ数 $\times\pi^{2n}$	不明
幾何学的周期	$\Gamma(2)$-捩れをもつ 楕円曲線族の Picard-Fuchs ODE	?	?	$\Gamma_1(5)$-捩れをもつ 楕円曲線族の Picard-Fuchs ODE	K3-曲面族の Picard-Fuchs ODE	考察なし	考察なし
Apéry(-like)数	○	○	一部分が anomalyとして 定義される	○	○	未定義	未定義
i) 二項系数表示	○			○	○	未定義	未定義
ii) p-ary展開による合同関係	○			○	○	未定義	未定義
iii) 漸化式の階層性	○			見えない			
iv)母関数のモジュラー解釈	$\Gamma(2)$-保型形式	?	$m=4$ Eichler形式	$\Gamma_1(5)$-保型形式			
v) メタ母関数	モジュラーマーラ測度表示			見えない			
特殊値 (負の整数)	0　$(-2n)$ NCベルヌーイ数　$(-(2n+1))$			0　$(-2n)$ ベルヌーイ数　$(-(2n+1))$			

$$Q:=\begin{pmatrix}\alpha & \\ & \beta\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}x^2\right)+\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}\left(x\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)\quad\left(\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right). \tag{1}$$

$$Z_H(\beta):=\mathrm{Tr}[\exp(-tH)]=\sum_{\mu\in\Omega}\exp\left(-\beta E(\mu)\right). \tag{2}$$

き，$L^2(\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}^2$ 上の自己共役作用素となり，離散固有値 $(0<)\lambda_0\leq\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_n\leq\cdots\uparrow\infty$ のみを持ちます．その重複度は高々 2 です. スペクトルゼータ関数 $\zeta_Q(s):=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-s}\ \left(\Re s>1\right)$ を考えます（$\alpha=\beta$ のとき，Q は 2 個の調和振動子とユニタリ同値となり $\zeta_Q(s)=2\sqrt{\alpha^2-1}\zeta(s)$）.

種々興味深いことがあります．例えば，$\zeta_Q(s)$ は全複素平面に有理型関数として解析接続され $s=1$ のみに一位の極をもち，$\zeta(s)$ と同様に負の偶数点で自明な零点を持ちます[6]．さらに，$\zeta_Q(2),\zeta_Q(3),\zeta_Q(4)$ からは自然なかたちでアペリー数の類似物が現れ，$\zeta_Q(2)$ では保型性や楕円曲線との明示的関連があるなど豊かな性質を有します(**表**)．$\zeta_Q(4)$ の研究では，通常のモジュラー形式を超え，Eichiler 形式（アーベル積分の一般化）[7] を自然に拡張したものや関連する新しいコホモロジーが現れ[8],[9] その具体的記述において，一般 Eisenstein 級数[10] の微分などが生まれます．これらは，志村五郎が1982年に創始後，現在改めて進展している概正則保型形式の研究[11]（の 1 変数の場合）にも深く関係しています．なお，筆者にとってのアペリー数類似に関する研究は，アペリ―の直後，$\zeta(s)$ の一般奇数点における値の無理数性の証明をめざして開拓された（成功はしなかったものの）フリッツ・ビューカーズらの数論・代数幾何的研究に触発されたところが極めて大です．

■被覆モデル

NCHO を導入した 1 つには，通常の表現論に現れるガウスの超幾何微分方程式の世界を広げ，系に課す対称性を少し弱めて，物理観点から調和振動子のスペクトルゼータ関数でもある $\zeta(s)$ の拡張を考えたいとの動機がありました．事実，表現論を用いることで，NCHO の固有値問題は 3 点 $\{0,1,\infty\}$ を確定特異点に持つ超幾何を越えて，4 点 $\{0,1,\alpha\beta,\infty\}$ を確定特異点に持つ Heun ODEの，$\{0,1\}$ を含み $\alpha\beta$ を含まない複素領域における正則関数の存在と同等であることが導かれます[12],[13]．さらには，この方程式において，特異点 $\alpha\beta$ と ∞ を合流させることにより，QRMの固有値問題と，その整関数解の存在が同値であることが知られていた合流型Heun 方程式が得られることも分かりました．この関係は，NCHOが，それぞれの Heun描像を見ることで，QRMのいわば被覆モデル[13] であることを示しています．この被覆関係は，η -NCHO と AQRM においても同様です[14],[15]．被覆モデル間の数論的性質の伝播，あるいはそのファイバの研究は興味深い問題です．さらにごく最近になり，NCHO が 2 光子量子ラビ模型[16] という伝統的な物理模型を与えているという事実が導かれました[17]．つまり，1 光子と 2 準位原子の相互作用（QRM）は，2 光子と 2 準位原子のそれから得られるという事実の発見といえます．このような物理模型間に生まれた被覆という数学概念が，実際の実験により確認できるものかどうかは分かりませんが，興味津々です．また 参考文献(17) では，この場合の被覆関係が，表現論的に

$$\zeta_H(s):=\sum_{\mu\in\Omega}E(\mu)^{-s}\quad\left(\Re(s)\gg 1\right).\tag{3}$$

$$\zeta_H(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}Z_H(t)e^{-t\tau}dt.\tag{4}$$

$$Z(\beta):=\sum_{X\subset\Lambda}e^{\beta|X|}\prod_{x\in X}\prod_{y\in\Lambda\setminus X}a_{xy}\quad(a_{xy}=a_{yx}\in[-1,1])\tag{5}$$

$$L(s,\Delta):=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)n^{-s}=\prod_{p:\text{素数}}(1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s})^{-1}\tag{6}$$

より明確になったことも特筆されます．

■分配関数とスペクトルゼータ関数

自己共役作用素Hをハミルトニアンに持つ量子系を考えます．このとき知りたいのはユニタリ作用素$\exp(-itH)$（プロパゲータ/熱核）であり，そのトレースである分配関数$Z_H(\beta)$です．分配関数はBoltzmann因子$\exp(-\beta E(\mu))$（$E(\mu)$は状態μのエネルギー：固有値）の総和として**式(2)**で与えられます．

ここでΩは可能なすべての固有状態を表しています．一方，系のスペクトルゼータ関数$\zeta_H(s)$とは，固有値列$E(\mu)$（簡単のため$E(\mu)\neq 0$としておきます）から定まる次のディリクレ級数です（**式(3)**）．

したがって，$\Gamma(s)$の定義から，両者はMellin変換でつながります（**式(4)**）．

ところで，長く待たれていたQRMやAQRMの熱核とそのトレースである分配関数の解析的公式が，ようやく得られました[18]～[20]．その方法は，ファインマン経路積分の数学的厳密形と考えられているトロッター・加藤の積公式を用い，ガウス型積分を実行し，さらに$SL_2(\mathbb{F}_2)$（$\mathbb{F}_2$は2元体）のヴェイユ表現に着目した$\mathbb{F}_2^n$ $(n=1,2,\ldots)$上のフーリエ変換を利用するというものです．さらに，公式に現れる級数が無限対称群$\mathfrak{S}_\infty$の$\mathbb{F}_2^\infty$への作用の既約表現分解の和に相当し，各項が$\mathfrak{S}_\infty$の軌道積分で与えられることも分かりました．これは驚きであり，より一般のモデルへのヒントになります．またこれにより，対応するスペクトルゼータ関数（一般にフルビッツ型）の無限遠点から原点を廻る周回積分表示を用いた解析接続やベルヌーイ数の拡張（Rabi-Bernoulli 数）も得られます．ここで注意すべきは，このRabi-Bernoulli 数の母関数が原点でのローラン展開であることから分配関数が復元できることです．一方で，NCHOについては，正の整数点における特殊値の代数的な関数の積分表示は得られますが，分配関数は得られていません．ただし，負の整数点での値も，やはりベルヌーイ数の拡張（NC-Bernulli数）としてとらえられます．したがってQRMの場合と同様，NC-Bernulli数の母関数が原点においてローラン展開をもてば，それがNCHOの分配関数を与えます．しかしながら現時点では，強い傍証はあるものの予想[21]の段階を越えません．一方で，予想に関連して収束の問題を吟味したところ，分配関数を用いて形式的に得られるゼータ関数のいわゆるボレル和による評価や，非アルキメデス的考察が有用なことも分かってきました．実際，$\mathbb{R}$では発散する特殊値表示が，p-進$\mathbb{Q}_p$の世界ではp-進フルビッツゼータ関数[22]の特殊値としてとらえられるのです[21]．

L-関数と分配関数の零点構造

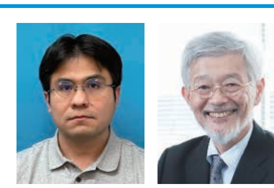
表は$\zeta_Q(s)$と$\zeta(s)$を対比したものです．前者では$\alpha/\beta\to 1$とすれば後者になるわけですが，大切なことは，後者だけでは見えなかった構造が前者によって浮かび上がってきていることです．$\zeta_Q(s)$に対してはオイラー積も関数等式も期待できません．しかし，正整数点における特殊値の代数関数による積分和表示[9]からは，$\zeta_Q(s)$が，数論的なL-関数（表現に付随するゼータ関数）の級数和であることが予想されています．仮にこの予想が正しければ，$\zeta_Q(s)$は，各項がオイラー積を持つとしても，全体としてはオイラー積を持ちません．関数等式についても，関数等式の対称軸（$\zeta(s)$ならば直線$\Re(s)=\frac{1}{2}$）が異なるL-関数の項があれば成立しないことに矛盾はありません．

他方，零点といえば関連して興味深いことの1つに，強磁性イジング模型の分配関数（**式(5)**）の零点がすべて虚数（$z=e^{-\beta}$とおけば単位円周上）であるというリー・ヤンの円定理(1952)があります[23]．この定理には，さまざまな拡張があります．もちろんそれは，分配関数の零点の前後で相転移が起こるからです．ゼータ関数やL-関数の零点研究は，グロタンディークの代数幾何の革新を促した有限体版のリーマン予想と見做せるヴェイユ予想，そして，保型形式$\Delta(z):=e^{2\pi iz}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi inz})^{24}$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)e^{2\pi inz}$に対する$L$-関数（**式(6)**）の（逆数の）零点の絶対値に関するラマヌジャン予想“$\Re(s)=\frac{11}{2}$”が20世紀の数論研究を牽引しました．一方，分配関数・保型形式側では，例えばEisenstein級数の零点研究は進みましたが，その意義はまだ必ずしも明確ではありません．相転移という観点からより深い研究が進むことが望まれます．また，このイジング模型のサイト数$|\Lambda|$を無限にしたときの偏角分布の研究は，$L(s,\Delta)$の零点の偏角分布に関する

佐藤-テイト予想に類似していて数学的にも興味深いものです．また，佐藤-テイト予想についても，これまでの正則保型形式-数論幾何を超えて非正則，特にセルバーグ跡公式で重要なマース形式などの研究の進展が強く望まれています．非正則な保型形式については堀永が，またその１つのベースとなる表現論からの研究およびNCHOの多変数化に向けた研究(15)が中濱により進んでいます．後者は，不変式論についての現代的思想であり保型形式への応用もあるロジャー・エヴァンス・ハウの dual pair の理論(24)にのっとった成果です．

■参考文献

(1) E.T. Jaynes and F.W. Cummings：“Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser,” Proc. IEEE, Vol. 51, pp. 89 -109, 1963.
(2) R. Apéry：“Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$,” Astérisque., Vol. 61, pp. 11-13, 1979.
(3) 布施・吉原・角柳・仙場：“超伝導人工原子と電磁場の相互作用～強結合のその先へ～,”「最近の研究から」，日本物理学会誌，Vol. 73, pp. 21-26, 2018.
(4) A. Parmeggiani and M. Wakayama：“Oscillator representations and systems of ordinary differential equations,” Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 98, pp. 26–30, 2001.
(5) A. Parmeggiani：“Spectral Theory of Non-commutative Harmonic Oscillators: An Introduction,” Lecture Notes in Math., Vol. 1992, Springer, 2010.
(6) T. Ichinose and M. Wakayama：“Zeta functions for the spectrum of the non-commutative harmonic oscillators,” Comm. Math. Phys., Vol. 258, pp. 697-739, 2005.
(7) R. C. Gunning：“The Eichler cohomology groups and automorphic forms,” Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 100, pp. 44-62, 1961.
(8) K. Kimoto and M. Wakayama：“Elliptic curves arising from the spectral zeta function for non-commutative harmonic oscillators and $\Gamma_0(4)$-modular forms,” in Proc. Conf. L-functions, World Scientific, pp. 201-218, 2007.
(9) K. Kimoto and M. Wakayama：“Apéry-like numbers for non-commutative harmonic oscillators and automorphic integrals,” Ann. Inst. H. Poincaré D, Vol. 10, pp. 205-275, 2023.
(10) B. C. Berndt：“Generalized Eisenstein series and modified Dedekind sums,” J. Reine Angew. Math., Vol. 272, pp. 182-193, 1974.
(11) S. Horinaga：“On the representations generated by Eisenstein series of weight $\frac{n+3}{2}$,” J. Number Theory., Vol. 201, pp. 206-227, 2019.
(12) H. Ochiai：“Non-commutative harmonic oscillators and Fuchsian ordinary differential operators,” Comm. Math. Phys., Vol. 217, pp. 357-373, 2001.
(13) M. Wakayama：“Equivalence between the eigenvalue problem of non-commutative harmonic oscillators and existence of holomorphic solutions of Heun differential equations, eigenstates degeneration and the Rabi model,” Int. Math. Res. Notices, Vol. 145, pp. 759-794, 2016.
(14) C. Reyes-Bustos and M. Wakayama：“Covering Families of the Asymmetric Quantum Rabi Model：η-Shifted Non-commutative Harmonic Oscillators,” Comm. Math. Phys., Vol. 403, pp. 1429-1476, 2023.
(15) R. Nakahama：“Representation theory of $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(1,1)$ and a generalization of non-commutative harmonic oscillators,” in Mathematical Foundation for Post-Quantum Cryptography, “Mathematic for Industry” Springer, 2024. arXiv: 2310. 17118
(16) D. Braak：“Spectral Determinant of the Two-Photon Quantum Rabi Model,” Ann. Phys., Vol. 535, p.2200519, 2023.
(17) R. Nakahama：“Equivalence between non-commutative harmonic oscillators and two-photon quantum Rabi models,” Preprinnt 2024. arXiv: 2405. 19814
(18) C. Reyes-Bustos and M. Wakayama：“The heat kernel for the quantum Rabi model,” Adv. Theor. Math. Phys., Vol. 5, pp. 1347-1447, 2022.
(19) C. Reyes-Bustos and M. Wakayama：“Heat kernel for the quantum Rabi model：II. Propagators and spectral determinants,” J. Phys. A：Math. Theor., Vol. 54, p. 115202, 2021.
(20) C. Reyes-Bustos：“The heat kernel of the asymmetric quantum Rabi model,” J. Phys. A：Math. Theor., Vol. 56, p. 425302, 2023.
(21) K. Kimoto and M. Wakayama：“Partition functions for non-commutative harmonic oscillators and related divergent series,” Indag. Math., 2024. https://doi.org/10.1016/j.indag.2024.05.011
(22) H. Cohen：“Number Theory Volume II：Analytic and Modern Tools,” Springer, 2007.
(23) D. Ruelle：“Statistical Mechanics：Rigorous Results,” Addison-Wesley, 1989.
(24) R. Howe：“Remarks on classical invariant theory,” Trans. Ameri. Math. Soc., Vol. 313, pp. 539-570, 1989.



（左から）　Cid Reyes-Bustos/ 若山 正人

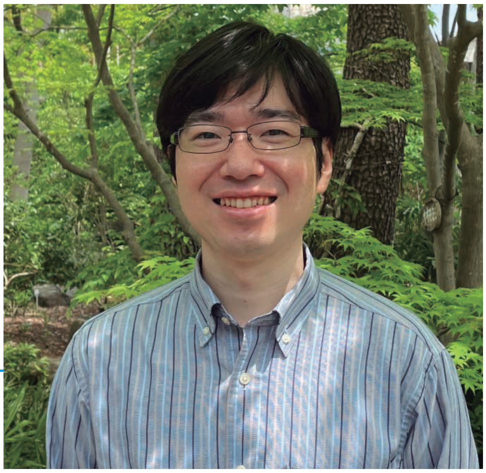
数学は言葉の学問です．物理にしても人間が使う自然言語では到底表現しきれません．論理を駆使しても不足です．そのような中，存在しているがひっそりと隠れている数学の世界を，関心ある問題から探る様子を垣間みていただけたなら望外の喜びです．

◆問い合わせ先
NTTコミュニケーション科学基礎研究所
企画担当
TEL 0774-93-5020
FAX 0774-93-5026
E-mail　cs-jousen-ml＠ntt.com

URL　https://journal.ntt.co.jp/article/27021
DOI　https://doi.org/10.60249/24075009

主役登場

異なるものを「つなぐ」抽象化の力



宮﨑　弘安　Hiroyasu Miyazaki

NTT基礎数学研究センタ
主任研究員

1，2，3……とお菓子を指折り数える幼子はすでに数学者です．お菓子と指という，本来全く異なるものの間に1対1の対応を付け「同じ」とみなすという行為．これは数学的な抽象思考そのものです．実際，数学者アンリ・ポアンカレは『科学と方法』において「数学とは異なるものを同じものとみなす技術である」と述べています．

1個のお菓子，1本の指は実在です．では1という「数」は実在でしょうか．これは哲学的な問いですが，少なくともお菓子や指とは違い「これが1ですよ」と目の前に示すことはできません．数は私たちの頭の中の抽象概念です．

抽象的なものはしばしば「役に立たない」というイメージを持たれがちですが，優れた抽象概念は社会生活を一変させるほどのインパクトを持ち得ます．1，2，3……という「数」の概念は私たちの生活のあらゆるところに入り込み絶大な力を発揮しています．歴史を紐解けば「0」や「負の数」といった数の概念は，1，2，3……に比べればかなり抽象的であるためか，人類社会に受け入れられるまでに時間がかかったようです．しかし現在，0やマイナスは当たり前に使われています．

高校では複素数というものも習います．例えば$i^2=-1$となる数iは複素数です．このような「奇妙な」数は，実生活であまり目にしません．しかし，私たちの生活を支えるあらゆる電子機器を設計するためには複素数が不可欠です．複素数は0や負の数よりもさらに抽象的ですが，徐々に「当たり前」な概念の仲間入りを果たしつつあります．このように，数学が生み出した抽象的な概念は，時間をかけて社会に受け入れられてきました．

20世紀以降，数学は爆発的な抽象化の時代を迎えました．これにより数学の研究は過去に類をみないほど進展し，3世紀以上にわたり未解決だったフェルマー予想の解決などの華々しい果実が得られました．また，その過程で生み出されたさまざまな理論は実社会にも応用されています．例えば有限体上の楕円曲線の理論は暗号技術に広く活用されていますし，図形や空間の特徴量を取り出すトポロジーはデータ解析の新領域を開拓しました．

しかし，数学の進展があまりにも急激だったため，数学者が当たり前に使いこなしているさまざまな概念・理論・技術の多くは，まだ十分に社会に溶け込めていません．この課題を解決するためには，分野を超えたコミュニケーションが必要です．数学者の間でさえ，少しでも専門が異なるとなかなか話が通じないことがあるほどなので，このような「異文化コミュニケーション」は一朝一夕ではかないません．長い時間をかけて少しずつ互いを理解していく必要があります．

NTT武蔵野研究開発センタの本館1階の石碑には，初代電気通信研究所長であった吉田五郎氏の「知の泉を汲んで研究し実用化により世に恵を具体的に提供しよう」という言葉が刻まれています．私たちが所属するNTT基礎数学研究センタの使命の1つは，数学の基礎研究をとおして豊かな「知の泉」を開拓し提供することです．数学はその優れた抽象性のおかげで，一見異なる対象・分野を「つなぐ」力を持っています．本特集記事『数論・代数幾何・表現論が紡ぐ数学の世界』に掲載している記事の相関図のように，センタに所属するメンバの研究領域も緊密につながり合っています．私たちはこのつながりをさらに強めるとともに，数学の外側にも輪を広げていくことをめざしています．

私は昔から「何かと何かの共通点を見つける」ことが好きでした．さまざまな異なるコホモロジーの共通構造を炙り出し「つなぐ」ことを目的とするモチーフ理論を研究することは自然な選択でした．また，多様な分野の研究者が集う分野横断的な環境で仕事を続けてきたのも「一見全く異なる分野との予想外のつながり」を期待してのことでした．物理学，生物学，宇宙論，情報理論といったさまざまな分野の研究者と交流し，時には共同研究を行う中で感じてきたのは，数学は数学者が思う以上のポテンシャルを秘めているということです．もちろん，モチーフ理論のような最先端の数学の理論がそのままのかたちで何かの役に立つことは，それほど多くありません．しかし，数学者が呼吸するように無意識に使っている技法や考え方が，他の分野で驚くほど役に立つ現場を私は何度も目にしてきました．

数学者はどのように仕事をし，どのようにものを考え，どのように話すのか．民間研究所に身を置く数学者として，同僚たちにあるがままの私たちを知ってもらう．そしてあるがままの同僚たちの姿を知る．将来の大きな実りを見据えつつ，交流という種を地道に蒔くことを大切にしていきたいと思っています．

URL https://journal.ntt.co.jp/article/27025
DOI https://doi.org/10.60249/24071101

NTTコミュニケーション科学基礎研究所
フェロー

柏野邦夫 Kunio Kashino

クロスモーダル表現学習技術によりバイオデジタルツインの実現をめざす

2020年11月に発表された「NTT医療健康ビジョン」の中では，医療資源の有効活用・物理的制約の緩和，予防から治療後まで連続的なケア，個人ごとに個別化された精密なケアの実現をめざして，バイオデジタルツイン（BDT）による生体シミュレーションの実現に取り組む，としています．BDTは実際の生体をデジタル世界に写し取ったものですが，そのためには生体の機能や，その背後にある物理的・化学的な機序をどのようにデジタル情報として表現（数値化や記号化）するかがポイントになります．このような観点からBDTの実現にチャレンジする，NTTコミュニケーション科学基礎研究所 柏野邦夫フェローに，バイオメディカル分野へのAIの活用，異分野の共同研究における刺激と気付き，新しいものを生み出す際の視点などについて伺いました．

クロスモーダルにより新たな知を生み出し，バイオメディカル分野に活用

現在，手掛けていらっしゃる研究について教えていただけますでしょうか．

「情報表現学習技術の研究」と「バイオメディカル情報処理基礎研究」に取り組んでいます．

私はかねてから，音や画像・映像の認識・検索に関する研究に継続して取り組んできました．そこでのポイントも，メディアの情報をいかに的確にかつ効率良く，デジタル情報として表現するかにあります．これも１つの「情報表現学習技術の研究」です．近年では精度や効率の観点だけでなく，データに隠れた構造を発見したり新しい知識の発見をサポートしたりできるような情報表現などにも研究を拡げています．そして，その技術の適用先として特に医療・健康分野に焦点を定めて取り組んでいるのが「バイオメディカル情報処理基礎研究」です．

昨今，大規模言語モデル（LLM：Large Language Models）などのいわゆる生成AI（人工知能）が注目を集めています．生成AIも事物の「情報表現」（情報をデジタル的に表したもの）に基づいて動作しており，情報表現を参照しながら，与えられた条件（例えば質問文など）にふさわしい出力を生成する仕組みです．情報表現の方法は大量のデータから学習されます．大量のデータの持つパワーは専門家の想像をも超えるほど圧倒的で，文章や画像や動画など，少し前には考えられなかったような有用な出力が得られるシステムが実現されてきています．しかしその一方で，なぜそのようなシステムの動作が得られるのか，システムの内部で特定の情報がどのように表現されているのかなどといった点では，まだ十分に解明されていないところがあります．前述の情報表現学習技術の研究はこのような問題意識にも通じるところがあり，大量のデータに基づく学習の長所と情報表現の透明性の両立を図るのが情報表現学習技術の研究，ということができます．したがって，この研究が成就すれば，例えばAIシステムの規模を最適化したり，出力に対する信頼性を確保したりといった要求に対して一定の回答を与えるものになるはずです．

研究課題は，情報表現の解明・解析・構成論・最適化・活用など多岐にわたります．その目標は，作用機序が明らかで最適化された情報表現やその構成方法を確立することにあります．そのために，今注目しているのは情報と情報の間の関係性の抽出と利用です．例として画像認識の問題を考えましょう．画像データだけしか参照するものがない状況では，画像とそこに映っているものの名前のペアを学習データとして，これを大量に用意してAIを学習させるのが普通のアプローチです．このような方法は，使える場面では非常に強力ですが，都合の良い学習データがいつも簡単

に用意できるとは限りませんし，ものの名前のつけ方が変化していくような場合には適しません．しかし，ネット動画やテレビ番組や日常の風景のように，もし画像とそれに紐付く音声情報とが参照できる状況であれば，そのようなアプローチに頼らずとも，つまり学習データを人手で用意しなくても，画像と音声との関係性を手掛かりに，何の画像かを判別し，さらに映っているものの間の意味的な関係（意味の近さ）も判断できるようになるのです．私たちの実験例では，事前知識を全く与えず，数百時間の相撲中継を録画したものをシステムに与えると，その画像と音声の情報だけから，頻出（例えば上位10種類）の決まり手をかなりの精度で見分けられるようになることが示されています．この例のように，ある一種類のデータを見ているだけでは分かりにくかったことが，複数種類のデータを参照することで浮き彫りになるといったことが，この世界には多くあるのではないかと考えられます．情報の種類のことをモダリティと言いますが，それらを相互に見渡して，相互の関係を解析することが，これからの情報表現学習技術の1つの鍵になると考えているわけです．私たちはこのようなアプローチを，モダリティを横断するという意味で「クロスモーダル」と呼んでいます．

折しも，最近はさまざまな種類の大量の情報収集が可能となりました．医学や生物学の分野でも，遺伝子の情報，細胞レベルでの振る舞い，臨床検査の結果など，種類の異なる大量の情報を解析し，相互に照らし合わせることが，最近の研究や技術の進歩により徐々に可能になりつつあります．IOWN（Innovative Optical and Wireless Network）の普及はこれをさらに強力に後押しすることでしょう．このように集められた情報間の隠れた関係を明らかにし，推論・シミュレーションに反映させることで，数年後の健康状態の予測や薬・治療方法による効能や副作用の推測といったことが，遠くない将来に一定程度可能になってくると考えています．さらには，こういったクロスモーダルの研究を行うことで，人間がこれまで気付いていなかったような新たな知を生み出すAIができるのではないかと思います．科学技術の研究においても，人間の有用なパートナーとしてAIが創造性を発揮するようになるかもしれません．

クロスモーダルを生体情報に適用するとバイオデジタルツインにつながるのですね．

はい．医学や生物学の歴史はモデル化の歴史であるといってもいいぐらい，生体のモデル化は昔から行われていますが，従来は専門家の個別の実験や洞察に基づくものが多かったと思います．しかし生体は複雑な対象であるため，手作業で詳細なモデルをつくっていくことには限界もあるでしょう．そこで，大量，あるいは多種多様なデータの持つ潜在的なパワーを活かすべく，情報表現を自動的に学習する技術が重要になるのです．

NTTは，2020年11月，「NTT医療健康ビジョン」において，医療資源の有効活用・物理的制約の緩和，予防から治療後まで連続的なケア，個人ごとに個別化された精密なケアの実現をめざすことを発表しました．その核となるコンセプトがバイオデジタルツイン（BDT）による生体シミュレーションの実現でした．前回の取材（2021年6月号）で紹介した「AIテレ聴診器」は，そのためのセンシングツールの1つでした．その後，BDTを情報系基礎研究の観点から支えることも目的として，NTT コミュニケーション科学基礎研究所メディア情報研究部に，生体情報処理研究グループが新設され，私はそのリーダーに着任しました．このグループでは，多種多様な情報を対象とする機械学習，信号処理，パターン処理の新たな基礎技術自体の創出を基本的な活動としながら，それらを実地に生体情報に適用して，社会的に有用な新領域を開拓していく活動にも積極的に取り組んでいます．このため，NTT物性科学基礎研究所バイオメディカル情報科学研究プロジェクトや研究開発マーケティング本部アライアンス部門との連携はもちろん，特有の強みを持つ大学や病院との連携も進めています．

以下，研究チームによる具体的な研究をいくつか紹介しましょう．

榊原記念病院と，心肺機能の高精度シミュレーションの共同研究を行っています．心臓病は多くの国で死因の1～2位に位置するような重要な疾患ですが，早期の発見・治療と，治療後のリハビリテーション（運動療法）の効果が特に高いことが知られ，そのうち運動療法については，その人に合った適切な強度で運動することで5年後の生存率が格段に向上することが知られています．そこで問題になるのが適切な運動強度の設定です．運動が弱すぎれば効果が乏しく，強すぎれば逆効果，もしくは危険を伴うこともあり得ます．そこで，運動の処方においては運動強度を設定するために心肺運動負荷試験（CPX：Cardiopulmonary exercise testing）という検査が行われるのですが，これは対象の方に限界に近い運動をしてもらう必要があることなどからあまり普及していないのが実状です．そこで，国内最多のCPX実施例を持つ榊原記念病院のデータから，機械学習により，実際にはCPX検査を行うことなくそれ以外の身体所見から CPX検査結果を推定するモデルを作成しました．これを用いれば，全国あるいは世界中で，より多くの人が適切な運動療法を受けられるようになることが期待されます．現在，さまざまな検証を重ねるなど，近い将来の実用化に向けた準備も進めています．

また，大阪大学のヒューマン・メタバース疾患研究拠点（PRIMe）とは，iPS細胞を用いた心筋細胞のパフォーマンス計測とモデル化の研究を進めています．iPS細胞は，ご存じの方も多いと思いますが，人工多能性幹細胞とも呼ばれ，人間の皮膚や血液などから採取した細胞に特定の操作を行って培養することで，さまざまな組織や臓器の細胞に分化する能力を持つようになった細胞です．大阪大学ではこれを活用した人工心筋細胞組織による疾患モデルの研究を行っています．つまり，遺伝的な要因を持つ重い心臓病の患者から採取した細胞を培養して心筋組織に育て，その心筋と

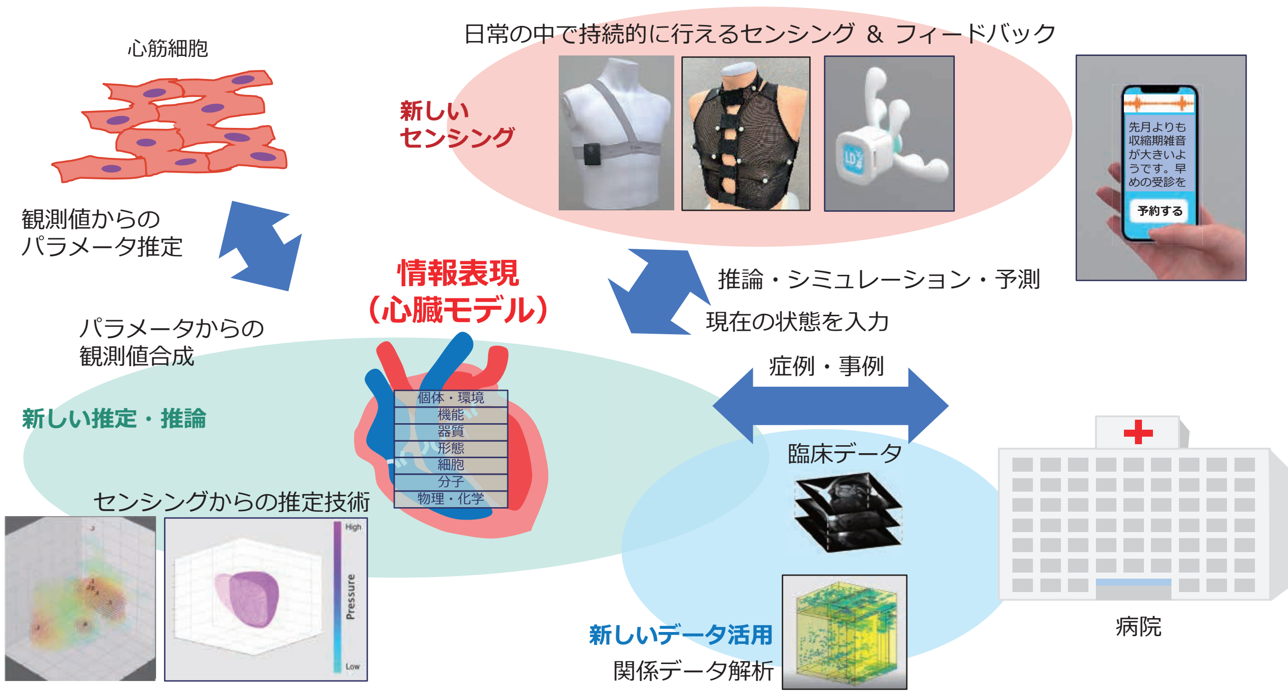


図１　心臓のバイオデジタルツインの概要

しての性質，例えば収縮力や拡張力を実際に計測しながら，疾患のメカニズムを解明したり治療法を開発したりしようという研究です．これは物理的な，つまり実物として存在する疾患モデルなのですが，私たちはこれのデジタル化に取り組んでおり，実際に共同で収縮力や拡張力を計測しながらモデル化を進めています．デジタルモデル化のメリットは数多く挙げられるのですが，中でも重要なのは，デジタル空間の中で心筋組織をつなぎ合わせて心臓（臓器）のモデルをつくれる可能性がある点でしょう．これによって，臓器に対して得られている数々の情報と，細胞や遺伝子といったミクロな生体情報とがモデルによってつながります（**図１**）．これはデジタル化ならではの利点です．現在，実際に培養によってつくれるのは，例えば数ミリ～数センチぐらいまでの，臓器に比べれば小さな細胞塊までで，複雑な構造を持った臓器までを物理的に構成することは困難です．ところがデジタル空間では，一定の条件や仮定を置いたうえで細胞塊をつなぎ合わせて，臓器としてのパフォーマンスを推計することができる可能性があります．これは，治療法の選択などに向けて大きな一歩になるのではないかと思います．

このほか，多チャネルマルチモーダル生体計測として，前回紹介した，心電図電極，マイクロホン，圧力センサ，加速度センサ等により収集したデータや心音，体内音等の音を遠隔でAI解析して身体状態を推測する「AIテレ聴診器」に引き続くフェーズで，測定されたデータをクロスモーダルエンコーダ・デコーダに入力し，獲得された情報表現に基づいて用途に応じた説明文を表示するなど，新たなユースケースの創出や精度向上をめざしています（**図２**）．また，北里大学病院との共同研究において，胸に当てる聴診器タイプのセンサ端末をお使いいただいて，その実用性の検証を進めています．その中で最近新知見が得られ，医学系の雑誌に論文が掲載されました．

機械学習の基礎研究に属する研究も推し進めています．例えば，細胞は分化過程において生物の組織ごとに機能が分かれていきますが，ある時点での観測からその元がどうだったのか（細胞分化過程）を解析・推定・モデル化することは重要な課題です．機械学習の観点では，不確定な要素が多い状況においていかに確からしいモデルを推定するか，という課題です．私たちはそれに対して新しい手法を提案して，効果の検証を進めています．

異分野間の常識の壁を乗り越えた共同研究

基礎研究でありながら実用化も期待できそうですが，どのような課題があるのでしょうか．

まず研究の面では，私や，研究チームのメンバーの多くが医学や生物学に関して専門外であったことが，苦労を伴う点だったと思います．コラボレーションを成立させるにもある程度の基礎知識が必要ですし，異分野間では，言葉から行動様式まで全く異なることが多くあり，想像力と歩み寄る姿勢が問われます．メンバー

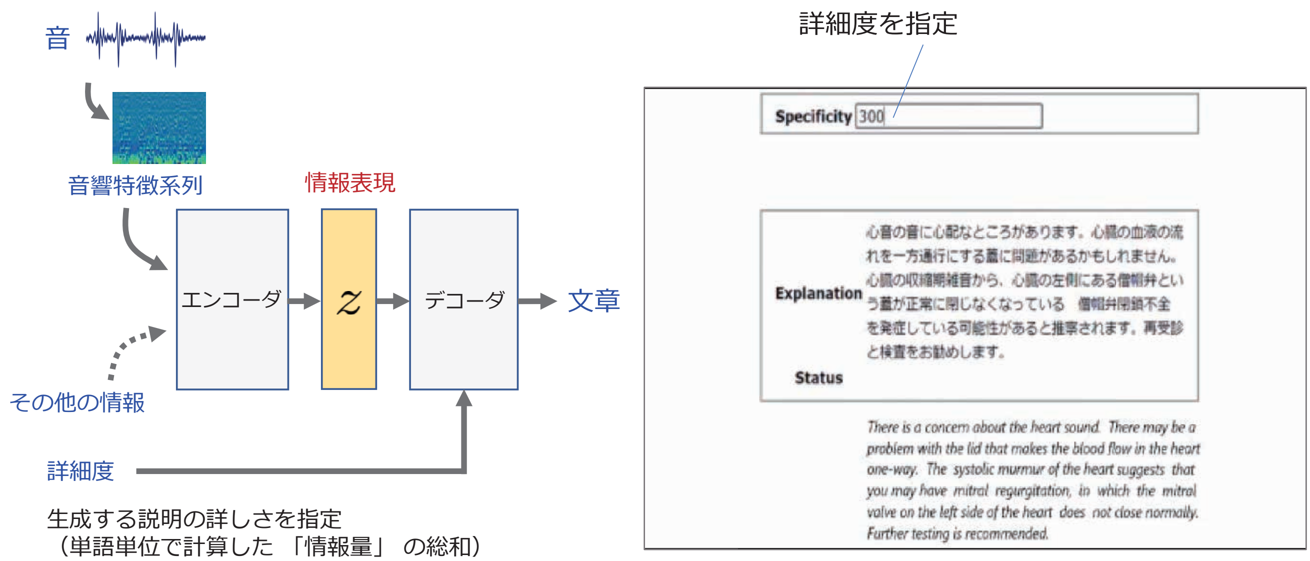


図２　AIテレ聴診器のユースケース（心音から説明文を生成）

一同の苦労もまだ絶えませんが，一方では，サプライズや新たな発見を楽しめる面もあります．

実用化という面では，生体や医療にかかわる場合，定められたルールに従い，信頼性を担保していく必要があるわけですが，これも私たち自身にとっては専門外の領域でした．これについては幸い，多くの方々の協力をいただくことができ，慣れない中でも少しずつ前進できるようになってきているのは有難いことだと思います．

常識や文化の違いをお互いに理解し合っていくことで，その中に共通して存在する大事なものが浮かび上がってくる

研究者として心掛けていることを教えてください．

基礎研究を軸足にして仕事をするうえで，意外に聞こえるかもしれませんが，むしろ社会的な視点を強く意識するように心掛けています．それから，最近の変化といえば，世界を身近に感じられるようになったことでしょうか．NTTグループもどんどんグローバルな企業体になっているところですが，私はこれまで，気付いてみれば国際学会や国際会議への参加など，研究コミュニティとの接点のみが世界と接することの大半を占めていました．しかし最近は，生体情報の分野に接するようになったことで，地球上のさまざまな環境に暮らす一般の人たちの生活を思い浮かべることが増えたように思います．

もう１つ，心掛けていることを挙げるとすると，何をやるべきかと，どうやるべきかのバランスです．このうちのどちらが大事か，は場面により変わると思いますが，新しいものを生み出す場面に限っていえば，私は両方が大事だと思っています．新しい方法論によってできることが増え，やるべきことの追求が新しい方法論の誕生を加速するというダイナミズムが，世の中を変えていく原動力だと感じるからです．

最近の所感について付け加えると，医療者の方と接する機会が増え，一様に，その使命感や真摯に物事にあたる姿勢に感銘を受けるところが多くあります．異分野の方と，何が重要かを共有したうえで，常識や文化の違いをお互いに理解し合っていくことで，その中に共通して存在する大事なものが浮かび上がってくるように感じます．これは，クロスモーダルの情報処理によって本質的な情報が浮き彫りになってくる図式と似ていますね．

後進の研究者へのメッセージをお願いします．

新しいものを生み出す苦労や楽しさを共有できるとうれしいです．何が重要なのかを考えて，そこに意識を向けて常識にとらわれずにチャレンジしていきましょう．

URL https://journal.ntt.co.jp/article/27027
DOI https://doi.org/10.60249/24071201

NTTドコモ
6Gネットワークイノベーション部（株式会社Space Compass）
岸山祥久 Yoshihisa Kishiyama

「超カバレッジ拡張」をめざしてHAPSを実用化

日本では2020年３月に5G（第５世代移動通信システム）の商用サービスが開始されましたが，3GPP（Third Generation Partnership Project）をはじめとして，すでに5Gの高度化や6G（第６世代移動通信システム）の研究開発や国際標準化が進められています．その中で，「超カバレッジ拡張」を実現する技術として，NTN（Non-Terrestrial Network）が注目されており，成層圏を飛行するHAPS（High-Altitude Platform Station）を利用する通信技術が，現在は実用化に向けた開発段階にあります．これまで4G（第４世代移動通信システム），5G，6Gの無線技術の研究開発に従事したNTTドコモから，現在はSpace Compassに出向して成層圏HAPS通信サービスの実現をめざしている岸山祥久氏に，将来形態であるHAPSコンステレーションへの想い，技術者として大切だと考えているバランス感覚などについて伺いました．

NTNの実現技術として注目を集めているHAPSと，日本初のHAPS通信サービスの実現をめざして

現在，手掛けている技術の概要をお聞かせせいただけますか．

2022年７月にNTTとスカパーJSAT株式会社の合弁で設立された株式会社Space Compassでは，IOWN（Innovative Optical and Wireless Network）のコンセプトの１つである宇宙統合コンピューティング・ネットワーク（**図１**）の実現をビジョンとしており，その中で私は宇宙RAN（Radio Access Network）の事業化，特にHAPS（High-Altitude Platform Station）を用いた通信サービスの実用化に取り組んでいます．

日本ではNTTドコモをはじめ2020年３月に5G（第５世代移動通信システム）の商用サービスが開始され，さらにNTTドコモは，2021年12月に，5G専用のコアネットワーク設備である5GC（5G-Core）と，5G基地局を組み合わせた「5G SA（Stand Alone)」によるサービスを開始しました．一方で，すでに5Gの高度化や6G（第６世代移動通信システム）に向けて，移動通信ネットワークでは十分にカバーできなかった空・海・宇宙を含むあらゆる場所への「超カバレッジ拡張」の実現をめざした研究開発が進められています．「超カバレッジ拡張」を実現する技術として，NTN（Non-Terrestrial Network）が注目されており，移動通信システムの国際標準化機関である3GPP（Third Generation Partnership Project）では，5Gの無線技術であるNR（New Radio）のNTNへの拡張検討も進められています．

NTNを実現するプラットフォームとして，高度約３万6000 kmの軌道上にある静止衛星GEO（Geostationary Orbit satellite），高度数100〜約2000 kmの周回軌道上にある低軌道衛星LEO（Low Earth Orbit satellite），および高度約20 kmの成層圏で一定の場所に常駐することができ，陸上に半径50〜100 km程度のカバレッジエリアを形成できるHAPSの３つが主に検討されています．

HAPSには固定翼型，飛行船型，気球型などの種類がありますが，Space Compassではグライダーのような形状をした固定翼型のHAPS機体を利用した通信サービス，およびHAPSから取得できる映像データ等を活用するリモートセンシングの実用化をめざしています（**図２**）．固定翼型のHAPSは地表からの高度約20 kmの成層圏で旋回飛行し，地球を周回するLEOと違って地上からはほぼ定点に位置するようにみえるため，定点での観測や動画撮像によるリモートセンシングに活用可能です． １台のHAPSによる通信サービスのカバレッジエリアは，半径50〜100 km 程度であるため，日本全国をカバーするには，50〜100機程度のHAPSを成層圏に配置する必要があります．旅客機の飛行高度が約10 kmであることを考えると，高度約20 kmのHAPSは，LEOに比べてもかなり低軌道で地上に近いため，成層圏から端末〔スマートフォン，IoT（Internet of Things）デバイス〕への低遅延な直接通信を提供できます．そのため，地上ネットワークでのエリア化が困難な山岳地域，離島，海上，上空等への通信エリア拡張や，地

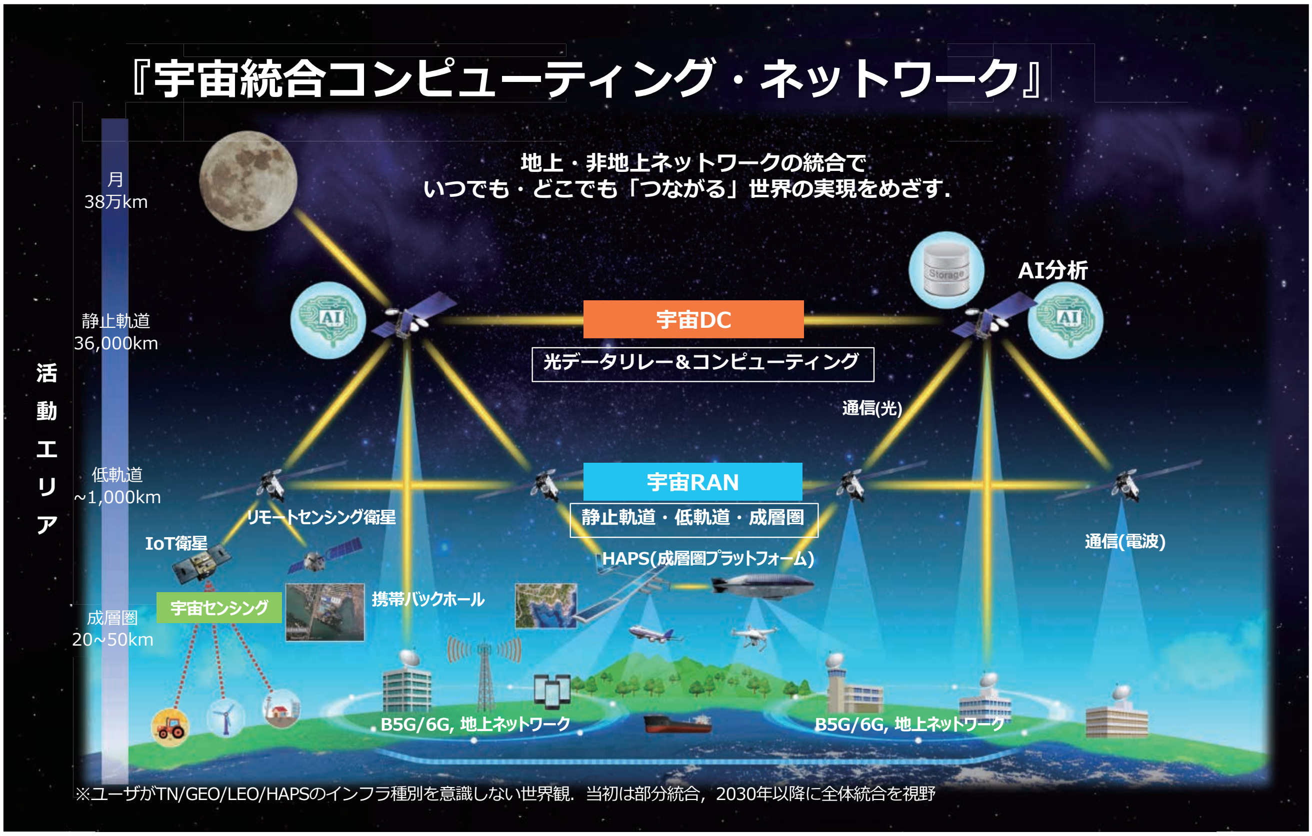


図１　Space Compassがめざす宇宙統合コンピューティング・ネットワーク

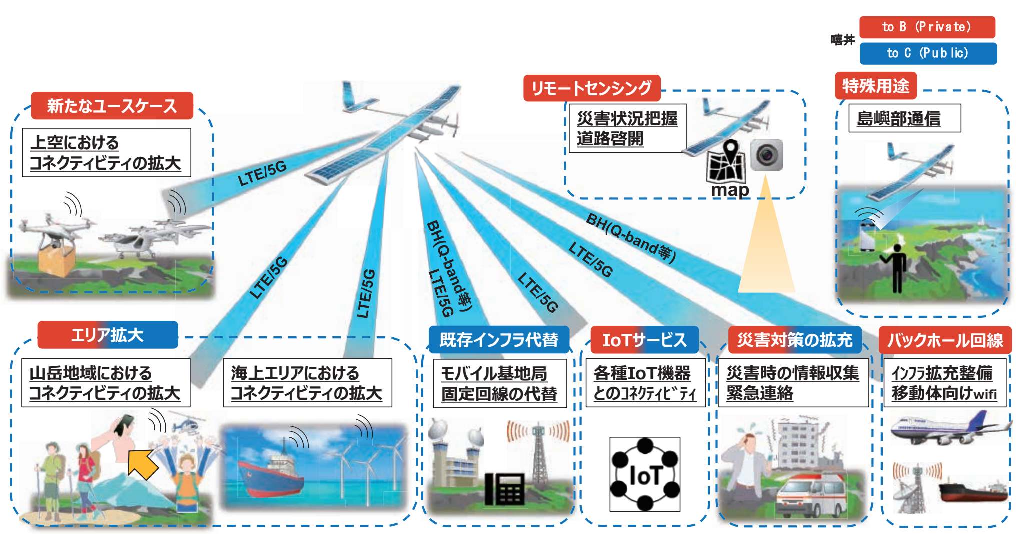


図２　HAPSを活用したさまざまなユースケース

震等の災害対策への活用がユースケースとして期待されます．また，将来的には既存バックホール回線の代替を含む高速大容量な通信サービスを実現できるポテンシャルがあります．

Space Compassでは，2025年度中にHAPSを用いた通信サービスを国内で実用化することをめざしています．この早期実用化に向けて，ベントパイプ（透過中継型）方式と呼ばれるHAPS直接通信システムを開発しています（**図３**）．ベントパイプ方式は，地上に設置された移動通信網の基地局やコアネットワークを利活用しつつ，4G（第４世代移動通信システム）や5Gの無線信号を地上ゲートウェイ（GW）局およびHAPS搭載のペイロードを経由して携帯端末へ直接通信サービスを提供するシステムです．ここで，地上GW局とHAPSペイロード間の通信リンクであるフィー

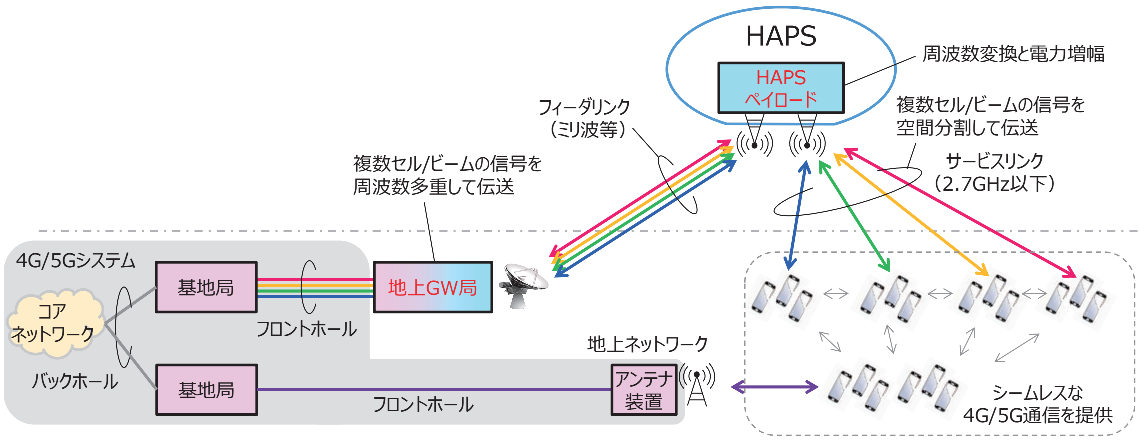


図３　HAPS通信サービスの早期実用化に向けたネットワーク構成

ダリンクには，ミリ波等の高周波数帯を使用し，複数セル・ビームの信号を周波数多重して広帯域で伝送します．一方，HAPSペイロードと地上の携帯端末間の通信リンクであるサービスリンクの周波数帯は携帯端末が利用可能な4Gや5Gの周波数帯のうちHAPS用にも割り当てられた周波数帯（2.7 GHz以下）を使用し，複数セル・ビームに空間分割した信号を同時に伝送します．HAPSペイロードは変復調等の信号処理は行わず，フィーダリンクとサービスリンク間の周波数変換や電力増幅を行う中継システムとして動作します．そのため，ベントパイプ方式ではHAPSペイロードの重量や消費電力を少なく設計でき，早期実用化に適しています．また，ベントパイプ方式によるHAPS直接通信システムは，地上の移動通信網の一部であるため，地上ネットワークとの間で4Gや5G通信のハンドオーバをそのまま実現でき，シームレスな通信サービスを提供することができます．

これまで，NTTドコモでは2021年２月に，HAPSを想定して高度約３ kmにセスナ機を飛ばし，HAPSシステムで使用される予定の38 GHz帯電波伝搬測定を行いましたが，理論上の検証はなされているものの国内で成層圏にHAPSを飛行させた実証実験は，現在まで実施されていません．海外ではHAPSによる通信サービスの実証実験の事例はありますが，日本国内だとHAPSを飛ばすのに，緯度（ソーラーパネルへの太陽光の照射角度と日照時間に影響）や偏西風の問題等があり実現できていないため，まずは国内成層圏での通信実証をめざしています．

注目度の高いHAPSですが，まだ国内では実証実験に至っていないのですね．

国内では実際に成層圏にHAPSを飛ばした事例はありません．そこで，「HAPSを介した携帯端末向け直接通信システムの早期実用化と高速大容量化技術の研究開発」というテーマで成層圏における実証実験に向けて取り組んでいます．

この研究開発は，国立研究開発法人情報通信研究機構（NICT）が公募する「革新的情報通信技術（Beyond 5G（6G））基金事業」に2023年11月に採択されて，Space Compass，NTTドコモ，NTT，スカパーJSATの４社で取り組んでいるものです．代表研究者はSpace Compassが担当し，私はNTTドコモからSpace Compassへ出向し，Space Compassの立場でこの研究開発に携わっています．

この研究開発は，下記を目的としており，最長５カ年の研究開発で，HAPSを介した携帯端末向け直接通信システムの早期実用化に向けた実証実験から，Beyond 5Gに向けた高度化技術の統合実証まで取り組む予定です（**図４**）．

①HAPS通信サービスの早期実用化推進：HAPSを介した携帯端末向け直接通信システムの実用化に向けた技術課題を解決し，国内でのHAPS通信サービス実験を実施することで，2025年度中の早期実用化の推進．

②Beyond 5Gに向けたHAPS通信サービスの高度化：将来的なHAPSの普及とユースケースの拡大を図るため，HAPS直接通信システムの高速大容量化技術，および海上エリアでの運用やTDD（Time Division Duplex）周波数帯の活用などHAPSの柔軟なサービス運用に資する研究開発の実施．

将来的なHAPSのユースケース拡大を図るには，高速大容量化，すなわちHAPS通信システムのビットコスト低減に向けた高度化が重要になります．そのため，この研究開発では，サービスリンクで空間分割するセル・ビーム数の増大やMIMO（Multiple-Input and Multiple-Output）空間多重の実装等による高速大容量化技術の開発に取り組みます．また，HAPSによる通信サービスをユーザからの要望に応じて迅速に場所を選ばず提供する柔軟性向上のための高度化も重要です．ベントパイプ方式では，HAPSの足元に地上ゲートウェイ（GW）局が必要になりますが，災害対策等では地上GW局の機動性が望まれます．さらに，海上エリアや光ファイバの未整備地域等では，地上GW局の設置自体が困難な場合もあります．また，迅速に場所を選ばずサービス提供を行うには，地上ネットワークとの干渉調整を必要としない専用の周波数帯を用いるのが理想です．これらを考慮し，この研究開発では，地上GW局を可搬にする開発，フィーダリンクに衛星経由のバッ

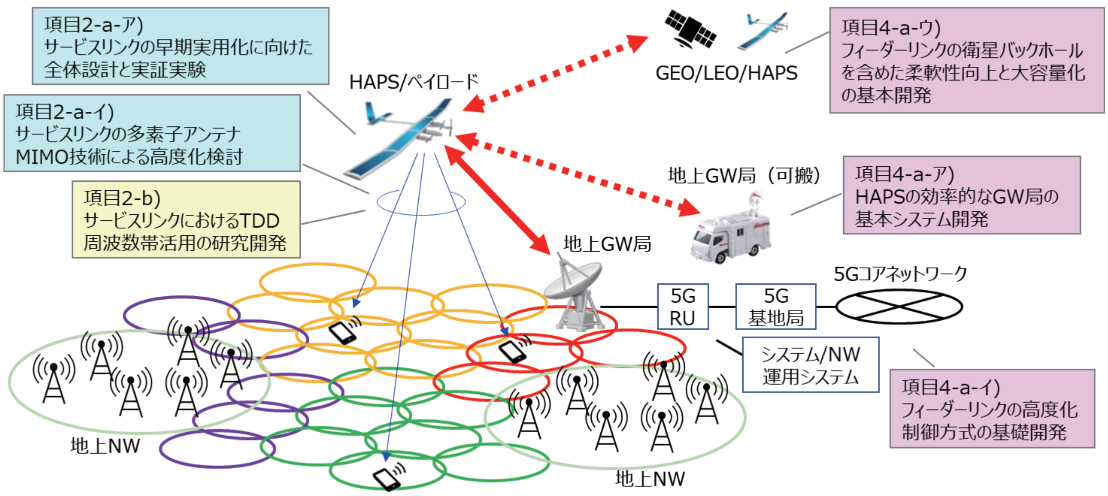


図４　HAPSを介した携帯端末向け直接通信システムの早期実用化と高速大容量化技術の研究開発課題

クホール回線を用いる検討，TDD（Time Division Duplex）周波数帯をHAPS専用に活用する検討などにも取り組みます．

成層圏における実証実験後はどのような展開になるのでしょうか．

机上の理論で話している段階よりも，現実世界で実証したという実績が残せるといろいろ周囲の反応も変わってくるということを，私は過去の4G，5Gの研究開発で経験していますので，HAPSに関しても日本国内での実証実績をまずは世の中に示し，それによりさまざまな業界のステークホルダと連携しながらユースケースなど具体的な議論をしていけると思っています．そのためにも，まずは最初の成層圏実証を成功させるというところに，現在はもっとも注力しています．

一方，現在のNTNは，LEOを多数用いて，それぞれが連携しながらエリアをカバーする，衛星コンステレーションが世の中的には主流になっています．しかしながら個人的には，HAPSが広く普及し，成層圏でHAPSコンステレーションが実現されると，もっとすごいことができるのではと未来に夢を馳せています．それにより，携帯端末への通信サービスを提供する面積カバレッジ100％が実現され，地上ネットワークとの完全冗長構成が構築されることで，ユースケースで検討されている災害対策のさらに先ともいえる，災害に対して強靭でびくともしない通信ネットワークが実現できるのではと期待しています．

LEOの場合は衛星が地球を周回しているため，多数の衛星を打ち上げて衛星コンステレーションを行わなければサービスを提供できませんが，HAPSは成層圏でほぼ固定的に旋回しているため，１機でもサービス提供できるという特長もあります．つまりHAPSの場合，１機によるスモールスタートでサービスを開始でき，HAPSの数を徐々に増やしつつコンステレーションを実現していくことで，サービスの拡張を行っていくことが可能となります．ただ，前述のように，日本全国をカバーするには，50～100機程度のHAPSを成層圏に配置する必要があり，飛行可能な緯度等の制限もあって本格的なHAPSコンステレーションの実現までには時間がかかることが想定されます．その間の過渡期に少ない機数でどのようなエリアカバーを行っていくのかといったような技術的課題や，少ない機数で実現するサービスおよびユースケース等のビジネス面の課題は少なくないと思います．

そういった過渡期では，目先のことに四苦八苦する状況になりがちですが，私はNTNの１つの将来形態であり到達点とも考えられる「HAPSコンステレーション」への想いを常に頭の中に置いておくようにしています．現在は主流ではなくても，HAPSコンステレーションが実現できたときのインパクトは非常に大きいと思いますし，そのようなゴールを頭に置くことで，私自身苦しい状況でも前向きになれますので，ぶれずに研究開発を続けることができています．

「非常識なことを常識にしていくのが研究」，常識と非常識のバランスが大切

技術者としてスキルの維持，スキルアップはどうしていますか．

私は学生時代から移動通信関連の研究を行っており，2000年にNTTドコモに入社後から現在まで，移動通信，特に国際標準化を含めて4G，5G，6Gの無線技術の研究開発に取り組んできました．4Gについては，3GPPにおいてLTE（Long Term Evolution）の無線アクセス方式，キャリアアグリゲーション等を中心としたLTE-Advancedの標準化活動を行っていました．当時は英語でのコミュニケーションが苦手で，標準化では四苦八苦していたのですが，このときに私が提案したいくつかの技術が標準規格に採用され，技術者として大きくスキルアップできたとともに，非常に貴重な成功（＆失敗）体験を得ることができました．この業界で技術者をめざす方には一度は3GPP標準化を経験するようお勧めします．その後5Gでは，研究開発が始まった2010年ごろから，

海外ベンダの世界でも一流の技術者たちと議論しながら，5Gの技術コンセプトの検討から実証実験までを取り組んできました．海外ベンダの尊敬する方に5Gのキューブの絵（ドコモ5Gホワイトペーパー参照）をほめてもらったのと，世界初の20 Gbit/s伝送実験を目撃できたのが特に思い出に残っています．そして，6Gについては2017年ごろから検討を開始し，海外ベンダの一流技術者たちと議論しながら「5G Evolution & 6G」[1]の技術コンセプトを検討し，2020年１月に発表された「ドコモ6Gホワイトペーパー」やコンセプト動画の作成に貢献してきました．上司から急に言われて確か２週間くらいで執筆したのが良い思い出です．こうした中で5Gからの拡張ではないNTNに新しさと魅力を感じて，現在Space CompassでのHAPS研究開発に取り組んでいます[2,3]．

このように，一貫して移動通信・無線技術にかかわる中で，自分のスキル不足や時には上司からの無茶ぶりを糧に，ある意味自分の限界を突破しながら，研究開発の技術者としてのスキルが身についてきたと思います．また，3GPPへの寄書入力や会合参加，そして海外ベンダ等との連携をとおして，英語を含むコミュニケーション能力や，即興でのプレゼンテーション能力もそれなりに身についてきたと思います．つまり私の場合，幸か不幸かは分かりませんが，技術者として成長できる環境には大変恵まれたのかなと思っています．

研究開発において大切にしていることは何でしょうか．

研究開発は，世の中にないもの，新しいことをテーマとしなければならない点があり，それに対して基本的には常識の範疇では対応できない場合が多くあります．私の学生時代の恩師も「非常識なことを常識にしていくのが研究」という言葉をおっしゃっていました．一方，非常識に寄りすぎると研究としてはよくても，ゴールである常識，すなわち実用化に到達できなくなります．つまり，この常識と非常識のバランス感覚が特に企業での実用化研究では重要だと思っています．このバランス感覚は研究者個々によってもさまざまだと思うのですが，私の場合は，基本的に少しでいいから常識の範疇を超えることを意識しています，逆にいうと，常識として正しくても，当たり前ではだめだと思っています．そして，その常識を少し超えた部分の斬新さを可視化しながら，ゴールとなる世界観では大きな差をつけるイメージを意識しています．現在の取り組みでは，「HAPSコンステレーション」がそのゴールに相当します．特に，海外ベンダ等，世界には一流の技術者が多くいるので，このような方々にディスカッションの価値があると思っていただくためにも，少し突き抜けた部分を発信していくことは必須だと思ってきました．

また，研究開発の技術者としては短所の克服はもちろん大切ですが，長所を伸ばすことがより大事だと思います．研究開発はチームで行うことが多くあり，常識を少し超える，新しいことを生み出していくという観点でも，自分の限界を設定せずにどんどんチャレンジするべきかと思います．自分の短所があっても，チームの中でお互い補完し合えればよいのではないでしょうか．私はサッカー観戦が好きなのですが，スーパースターがすべてのプレーに秀でているわけではなく，選手の特性を活かしてポジションごとの役割をこなすことが，勝利への近道になります．研究開発のチームもそれと似ていて，各人の長所を活かしつつ，それぞれが補完し合ってチームとしての成果につながっていくと思います．私自身も社会人としては正直至らない点が多くあることを自覚していますが，自分およびメンバ各人が長所を活かしてチャレンジできる環境と，短所をカバーしてくれる周囲に恵まれて，チームとして新しいことを生み出していくという研究開発に4G，5G，6Gと携わってこられたと思っています．

チャレンジとチームメンバどうしの補完で成果を出す

社内外の技術者，パートナーへのメッセージをお願いします．

私は，NTTドコモ入社以来，移動通信・無線技術における研究開発，実証実験，国際標準化等にかかわる中で，特に若手のうちは自分に求められる仕事に対して，たとえスキルが足りなくてもやらなければいけない環境の中で，自分自身成長してこられたと思っています．ですので，特に若手の技術者の方には，自分に求められる仕事に対して少しスキルが足りないくらいでちょうどいいと思ってほしいです．スキルが足りないことで失敗することもあると思いますし，そのような環境で仕事をすることはそれなりにハードなことですが，自分に限界を設定せずチャレンジすることで，大きく成長できるのではないかと思います．私自身，もともと素養のあった無線関連のスキルよりも，標準化活動等をとおして得られた英語やコミュニケーションに関するスキルのほうが，チャレンジングで苦労しましたが，その分さまざまな意味で成長できた実感があります．そして，チャレンジできる環境にあることが技術者としては幸せだと強く思います．それは当たり前ではなく，私の場合はそのような環境にも恵まれたと思っています．ぜひ，いろいろなことにチャレンジしてください．

そして，チーム各人の個性を尊重して，短所はチームで補えばいいので，個人の長所を活かせるようなチームづくりというのが，ある意味非常識なゴールをめざす研究開発において成果を挙げていくうえでは大切だと思います．チームマネジメントの立場になったらメンバが補完し合いつつベクトルを統一してチャレンジできる環境づくりと，適度な無茶ぶりでメンバにチャレンジを促すことをご考慮いただければと思います．

■参考文献

(1) 岸山・外園・小原・深澤：“5G Evolution & 6Gに向けたHAPS研究開発の取組み，”電子情報通信学会誌，Vol.106，No.5，2023．
(2) https://group.ntt/jp/newsrelease/2023/12/07/231207a.html
(3) https://group.ntt/jp/aerospace/

URL https://journal.ntt.co.jp/article/27029
DOI https://doi.org/10.60249/24071301

NTT人間情報研究所
特別研究員

中辻 真 Makoto Nakatsuji

AIと人のインタラクションが新たな世界へ導く「Human-AI協調基盤の構築」

NTTが独自開発したLLM（Large Language Model）「**tsuzumi**」をはじめ，チャットボットや画像生成などさまざまなサービスが提供されているAI（人工知能）分野．日々目まぐるしく状況が変化する中で，NTTがめざしている世界の1つが，「AIが自律成長しながら人間と協調する世界」です．従来のAI活動とは大きく異なるこの領域について，中辻真特別研究員は「より創造的な生産活動が可能になる」と提唱します．今回は，現在取り組まれている「生成型AIエージェントによるHuman-AI協調基盤構築」について伺いました．

◆PROFILE：2003年京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻修了．同年，NTT入社．2010年，京都大学大学院情報学研究科社会情報学専攻 博士課程修了．2013年レンセラー工科大学研究員．2015年NTTレゾナント．2023年よりNTT人間情報研究所．2015年人工知能学会論文賞，電子情報通信学会優秀論文賞などを受賞．深層学習を基にした対話システムの研究開発および実用化プロジェクトの推進を経て，現在はAIの自律成長・人間とAIの協調活動についてなどの研究開発に従事．情報学博士．2024年より特別研究員．

人間と協調してともに成長するAIエージェントが，より高度な創造的活動支援を可能に

■はじめに，現在進められている研究について教えてください．

私は現在，「生成型AIエージェントによるHuman-AI協調基盤構築」の研究に取り組んでいます．これは端的にいうと，AI（人工知能）が人間のように他者と協力して生産活動を行う「Human-AI協調社会基盤」の構築をめざすという研究です．従来のAIは，人に対話体験を提供することや人の作業を代行することが主な仕事でした．しかし本研究では，AIが人のパートナーとして協調する（力を合わせて事をなす）という従来のAIとは全く異なる役割を提供します（**図1**）．具体例として，自分のよう

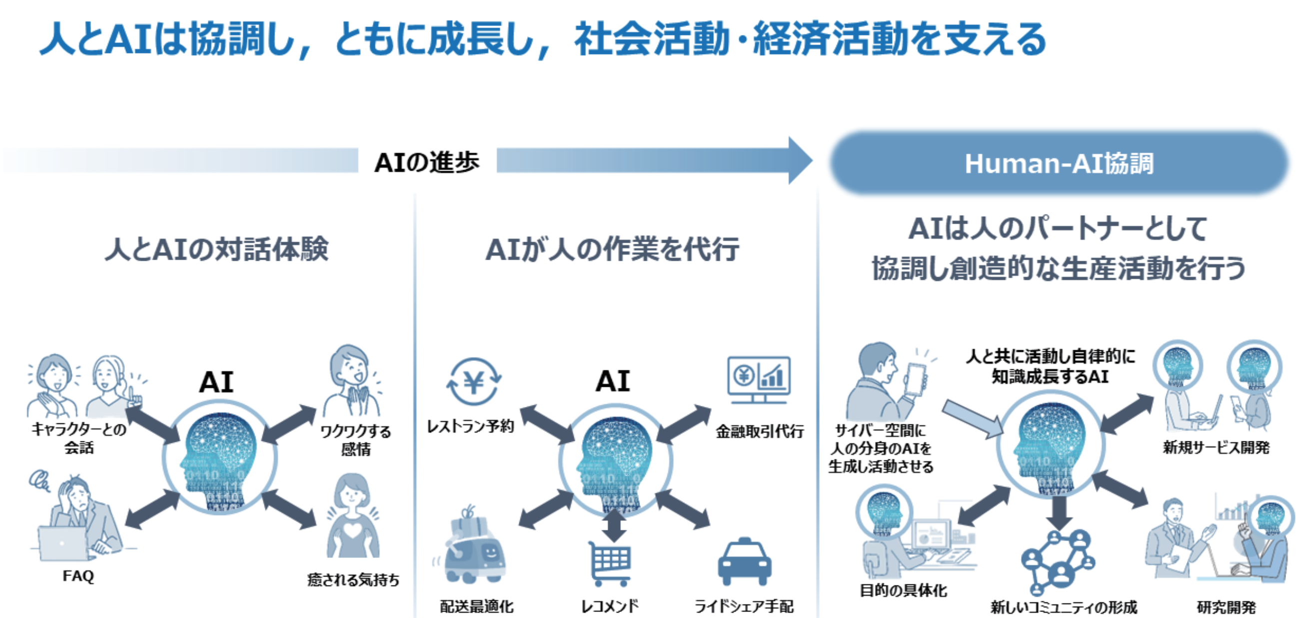


図1　従来のAIから「Human-AI協調」への変遷

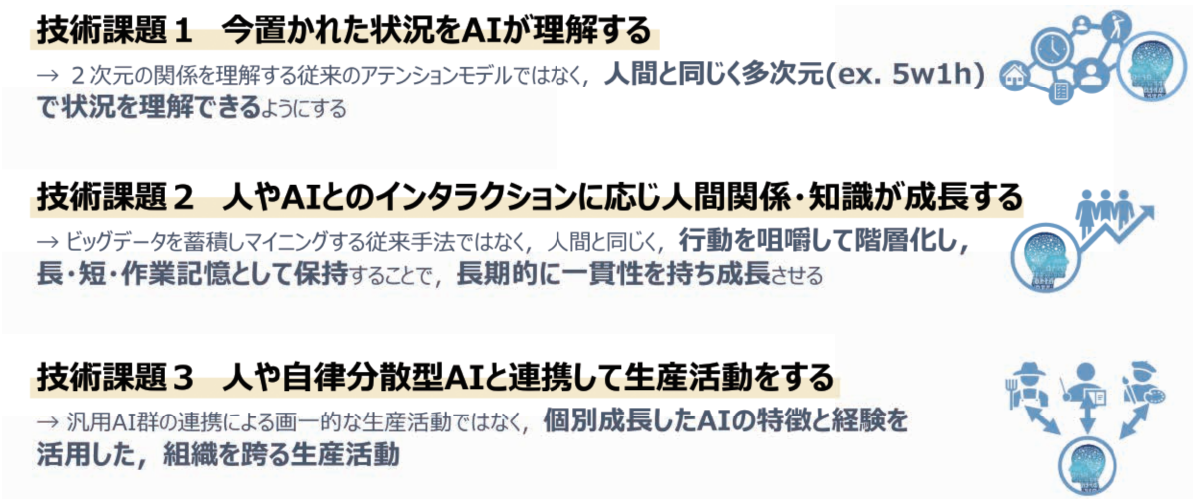


図２　Human-AI協調を実現する３つの技術課題

に思考し人や環境とインタラクションを行う分身AIエージェント（Another Me[1]）をサイバー空間に生成して活動させて成長させ協力することで，そのAIエージェントが人に代わって，または人と一緒に新規サービス開発や研究開発を行うなど，より創造的な生産活動が可能になります．

このような協調関係を実現するために，３つの重要な技術課題（**図２**）があると考えています．まず技術課題１「今置かれた状況をAIが理解する」では，AIが人間と同じく多次元，例えば５Ｗ１Ｈのような複雑な状況をAIが理解できるようにすることです．従来のAIでは，人間との膨大なインタラクション履歴を学習するといったように，「応答」と「発話」の二次元関係（二次元アテンションモデル[2]）を理解するという仕組みでした．しかし今後は，AIが知識トピック・時間・場所といったコンテクストに沿って発話と応答の関係を学習することで，より人間の知識にフィットした多次元のアテンションモデルを作成できると考えています．またAIの知識分布をコンテクスト軸で構造化して可視化できるため，人との知識共有が非常に容易になります．これまでの具体的な成果としては，複数データセットでの応答選択精度が従来手法より10〜30%ほど高くなり，精度向上を達成しています．

次に技術課題２「人やAIとのインタラクションに応じ人間関係・知識が成長する」では，AIエージェントが記憶・知識を持って自律的にコミュニケーションを行うことで，人間関係や知識を獲得して成長することをめざしています．従来のAIのようにビッグデータを蓄積してマイニングする手法ではなく，人間のように行動を咀嚼して階層化することがポイントです．例えば，人間の脳と同じように会話記録などから得た記憶・知識を整理して抽象度順に管理しておくことで，将来の行動への再利用性を高め，次の行動を学習・予測して動的にプロンプトに反映することができます．

そして技術課題３「人や自律分散型AIと連携して生産活動をする」では，人間のAnother Meまたは身代わりである生成AIエージェントが，自律・分散しながら成長・連携して創造的な生産活動を支援することをめざしています．これまでの取り組みの例として，私はAIキャラクターのグループチャットモデルを過去に開発し，現在も同種の研究を進めています．このモデルでは，AIキャラクターがユーザの習慣や好みを学び，ニュースや検索エンジンから収集したトレンドや一般的な知識を吸収して，他の人間が所有する他のAIキャラクターから収集した知識を交換しようとします．そしてAIキャラクターが人間や他のAIキャラクターとかかわることで，自律的に成長し協力する関係をつくろうとしていました．つまりこの技術のビジョンは，個別成長したAIの経験や知識を活用して現在の生産活動に適用することで，多種多様で創造的生産活動を提供することをめざすという，従来のAIによる画一的な生産活動とは大きく異なるものになっています．

■これまでどのようなサービスにかかわられてきたのでしょうか．

本研究を開始した当時，私はNTTレゾナントに属していました．そこではAIの技術開発を行いながら同時にサービス提供を行っていたため，事業計画を達成するための仕組みづくりを多く経験しています．具体的なサービスとしては，教えて！goo上での「恋愛相談AIオシエル[3],[4]」や，日本テレビ放送網株式会社様の案件の中で制作協力したTVキャラクターAI「AI奈菜ちゃん[5]」「AIカホコ[6]」などです．これらはありがたいことに非常に好評で多

複数人のプロンプト生成方法	個々のプロンプトで複数人を生成
オープンドメイン	○
専門知識の強化	○各エージェントが個別に知識を所有
生成エージェントの移動	○
生成エージェント間の情報伝搬	○各エージェントが個別に知識を所有し知識を伝搬
生成エージェントの役割・目的の有無	生成エージェント個別に役割・目的を持つ
アウトプットの生産	生成エージェント間で[個別の目的]と[全体の目的を擦り合わせながら]役割に沿った協調作業をし，[サービスを跨った]アウトプットを生産
生成エージェントの精錬	サービス・チーム内外のエージェントの協調作業に基づき、エージェントの知識およびサービス／チームの知識を精錬

図３　箱庭モデルの特徴

くのユーザに使われ，メディアにも数多く取り上げていただきました．またそうしたことを受け，さらに対話型AIでサービスを提供する流れができ，「AI x Design[(7)]」というサービスが誕生，そしてそれを発展させた「AI suite[(8)]」というサービスを開発しました．これは時代の流れに先んじて，言語のみではなく音声・映像も組み込み，パーソナライズされたAI技術を搭載し，ビジネス機会を得ようとしました．私は立上げ後２年ほどでNTT研究所に所属が変更となったのですが，現在もAI suiteはNTTドコモで提供されています．

このようにNTTレゾナントに所属していた時代は，さまざまなサービスを提供しながら研究開発を行っていました．その中で，私なりに工夫をしてAI技術でどう市場を獲得するかを模索し，また新しい技術をサービスにいち早く取り入れ，そこから収益を生み出しつつ先の研究を行うという，自律的なサイクルを伴う仕組みを構築しようと工夫をしていました．そして結果的に約７年の間，AIビジネスと研究開発の両輪を回すことができ，いくつかのサービスは非常に多くのユーザに使われるに至りました．またその裏では，ISWC（International Semantic Web Conference），AAAI（Association for the Advancement of Artificial Intelligence）やIJCAI（International Joint Conference on Artificial Intelligence）などのトップ会議にも採録されたアルゴリズムが動いており，サービス・技術両面において高いレベルの結果を出すことができました．また一部の技術は中国のデータセットに対する評価において，応答選択モデルとしては今でも世界一位の応答精度を持っています．

そして現在では「箱庭モデル」と呼ばれる，Human-AI協調の新たなモデルを開発しています（**図３**）．この技術は，AIエージェントが人間に代わってチームディスカッションや会話を行いながら知識を深め，最終的にビジネス企画書などをアウトプットするものです．生成された各エージェントは個別に専門知識を持ち，互いに議論をしながら知識を伝搬していくことで，各エージェントがそれぞれ持つ個別の目的と全体の目的をすり合わせた協調作業が行われ，最終的にサービスをまたがったアウトプットを生産することが可能になっています．

「スピード感」が大切なAI分野で，NTT研究所の層の厚い研究成果を活用

■ご研究において大切にされている考え方を教えてください．

特にAI分野の研究を行ううえでは，最新動向を押さえつつ次のトレンドを見極めて研究を模索することが非常に重要だと考えています．例えばChatGPT[(9)]のサービスがあれほどまで拡大した要因の１つは，いち早く市場にサービスを導入したからだと思います．さらにそれだけではなく，「果たして研究の方向性が合っているのか」といった疑問にもサービスを社会適用することで答えが見つかり，もし世の中に受け入れられればそれを担保としてさらに先の研究に進んでいけます．私自身NTTレゾナントに所属していたころは，時代の流れに沿ったAIサービスを即座に立ち

上げ，フィードバックを受けながら次の研究ネタを考えていくということに日々取り組んでいて，世間やお客さまからの声を直に聞ける環境下で「どこに研究の方向性を持っていけばいいか」と日々考えていました．またAI suiteに関与する研究では，かかわった複数の上司やチームメンバーに恵まれ非常にスムーズにリリースができたものの，一方でChatGPTの登場や巨大な研究組織とどう戦っていくかなど，研究者としても非常に難しく苦しい局面に立たされてもいました．

こうした状況下で改めて考えさせられたのは，NTT研究所の幅広い研究者と多様な研究成果を活用して，シームレスかつ市場に合わせて計画的に市場投入する仕組みづくりが重要だということです．時間が限られた研究では，次から次へと新しいアイデアが出てくるものの，それを１日も早くつくり上げて実験をして特許を取って……，というように迅速に研究を積み上げていかなければ，他の競合に先に着手されてしまいます．特に目まぐるしく状況が変化するAI分野においてはそうしたリスクが常に隣り合わせで，研究者どうしにも「スピード感を持って研究を進めなければ」という共通認識は存在していると思います．こうした状況で後れを取らないために，私自身も論文や他の研究者とのディスカッションをとおして常にトレンドをキャッチアップをしていくことは意識しています．

■最後に，研究者・学生・ビジネスパートナーの方々へ向けてメッセージをお願いします．

私がNTTに入社した2003年当時，AIや検索システムやセマンティックWeb[10]に関する研究が盛り上がっていて，「この分野はまさにこれから時代を変えていくだろう」と感じていました．その中で私が関心を持ったのが，研究を軸に事業も行っているNTTです．NTT研究所は日本の中でも機械学習やAIに関する研究者の層が厚く，実際にAAAIやIJCAIなどのトップ会議でNTTの研究者は毎年多くの発表をしています．AI技術は今後のビジネス機会の核になるものなので，日本のAIビジネスを切り拓いていくうえで非常に強みがあると感じています．またその強みを活かしたサービスを創造できる事業会社の裾野も広く，何よりNTTの持つネットワークサービスやエンドユーザとの連携が取れることはNTTならではの大きな強みですし，やり方次第では次のゲームチェンジャーになり得る大きな可能性を持っていると考えています．またサービスの利用者の声を直に聞けることで，自身の研究結果として論文にまとめることもできますし，研究者のモチベーションにもなるので，その点とても恵まれた環境であると感じています．

私は2023年７月にNTT研究所に所属となり，現在では多様な方と議論をとおして研究を進めています．そうした中で，新たな視点からの気付きもありますし，分野のコミュニティにおける研究成果に真剣に向き合うことの大切さも感じています．これは私と同年代くらいの方に当てはまることだと思いますが，「相手のやりたいことがコミュニティの中でどのような価値を見出すのか」，そうしたことを念頭に置いて議論を進めることができれば生産性のある議論になり，前向きな成果が生み出せるのではないかと考えています．また，広い視野を持って全体としての成果を生んでいく方向に研究を進めていくことが必要だと思いますし，私もそうして真摯に研究に向き合っていきたいと思っています．

今後も社会実装機会を時代に先んじて示していきながら，トップ会議などにマイルストンを合わせて学術面からもインパクトを与えていくことが重要だと考えています．そして研究であれ社会実装であれ，研究者間のコラボレーションによって生まれる創造的な研究活動やわくわくする仕事を行っていくこと，そして，そうした関係づくりが大切であると思っています．もしこれを読んでいる方でご興味のある方がいらっしゃれば，ぜひどこかで分野を盛り上げる研究でコラボレーションできることを願っています．

■参考文献

(1) https://journal.ntt.co.jp/article/16956
(2) https://doi.org/10.48550/arXiv.1706.03762
(3) https://ai-biblio.com/articles/391/
(4) https://cdn.kyodonewsprwire.jp/prwfile/release/M101547/201901282607/_prw_PR1fl_QRWJFcAz.pdf
(5) https://kyodonewsprwire.jp/release/201908029369
(6) https://www.jstage.jst.go.jp/article/itej/73/1/73_173/_pdf/-char/ja
(7) https://aixdesign.goo.ne.jp/
(8) https://aisuite.jp/
(9) https://ja.wikipedia.org/wiki/ChatGPT
(10) https://ja.wikipedia.org/wiki/Semantic_Web


（今回はリモートにてインタビューを実施しました）

明日のトップランナー

URL https://journal.ntt.co.jp/article/27031
DOI https://doi.org/10.60249/24073001

DOCOMO Innovations, Inc.

https://www.docomoinnovations.com/

NTT docomo DOCOMO Innovations

DOCOMO Innovations
秋永和計社長

シリコンバレーでオープンイノベーション志向の研究開発・ビジネス開発によりNTTグループに貢献する会社

生成AI（人工知能）やその核である大規模言語モデル（LLM：Large Language Models）が世界的に注目され，目まぐるしい進化を遂げています．こうしたイノベーティブな技術は，そのほとんどがGAFAMや多くのスタートアップがひしめく米国シリコンバレー発です．NTTドコモR&Dのグローバル拠点として，研究開発・ビジネス開発を推進するDOCOMO Innovations, Inc.の秋永和計社長に，オープンイノベーションとグローバリゼーションを意識した開発とNTTグループへの貢献について伺いました．

シリコンバレーでオープンイノベーションとグローバリゼーションを意識した研究開発・ビジネス開発

■設立の背景と会社の概要について教えてください．

DOCOMO Innovations, Inc.（ドコモイノベーションズ）は，NTTドコモのグローバルR&D拠点の1つとして，2011年に米国シリコンバレーで，オープンイノベーションを実践することを目的に設立されました．元々当地にはIEEE（米国電気・電子学会）での標準化への貢献や米国の技術の調査研究のためのNTTドコモUS研究所がありましたが，それらの技術開発の機能を活かしたまま，オープンイノベーションとグローバリゼーションを意識したビジネス開発の機能をもたせたのが，現在のドコモイノベーションズです．

以前はPalo Altoにオフィスがありましたが，2023年5月よりNTT Research, Inc.が運営するNTTグループが集結するセンタに移転し，シリコンバレーの地の利を活かした技術開発・ビジネス開発力をアセットに，NTTドコモR&DおよびNTTグループと連携して事業拡大に取り組んでいます（**図1**）．

（a）センタ外観　（b）オフィス　（c）NTTグループ企業が入居

図1　DOCOMO Innovations, Inc.のオフィス模様

■具体的にどのような事業展開をしているのでしょうか．

ドコモイノベーションズは，クラウドとAI（人工知能），データサイエンスを中心としたイノベーションを担当する「AI & Data Analytics Innovation Group」，オープンイノベーションを中心にビジネス機会を探索研究する「Open Innovation Strategy Group」，イノベーティブなデバイスなどを探索する「Product Planning & Strategy Group」，コンシューマサービスへの連携可能なビジネスを探索する「Business Development Group」の4つの組織から構成されています．

ドコモイノベーションズにおける注目している技術領域は，5G（第5世代移動通信システム）/6G（第6世代移動通信システム）/NTN（Non-Terrestrial Network），Edge Computing，AI/LLM（Large Language Models）/GenAI（生成AI），XR（eXtended Reality），IoT（Internet of Things），Web3関連技術，ロボット技術，センサ技術，量子コンピュータなどと広範にわたっており，さらにNTTグループの将来技術であるIOWN（Innovative Optical and Wireless Network）も含めて，この4組織でNTTドコモおよびそのグループのみならず，NTTグループ全体に対して有用な情報を展開し，技術検討やPoC（Proof of Concept）などを行いながら「使ってもらえる技術やサービス」を創出することを目的に業務を行っています（**図2**）．

AIをはじめ広範な技術領域において，日本からはみえない情報，現地ならではの情報を収集してNTTグループに提供

■事業を取り巻く環境はどのような状況でしょうか．

米国シリコンバレーという，GAFAMやスタートアップがひしめく地域において，AIとLLMを中心とするパラダイムシフトを無視することはできません．このパラダイムシフトは，通信事業者だけではなく，あらゆるサービスやその開発のやり方を変えてしまうくらいのインパクトを持って受け入れられている中で，多くのビジネスアイデアと新しい技術が日々生み出されています．また，AIに限らず，ネットワーク領域における宇宙利用や，センサやディスプレイデバイスに代表される変革としてのヘルスケアデバイスの進化や，XR関連グラスの進化，BMI（Brain Machine Interface）など多くの新しい製品・サービスが日々生まれています．これらの多くの情報の中で，NTTドコモやNTTグループに対して有用な情報を選別し，タイムリーに各社にインプットしていくということを心掛けています．特に日本からはみえない情報，現地ならではの情報を収集することを心掛け，関連する企業や団体からの情報をタイムリーに収集しています．

■どのような事業に注力されているのでしょうか．

昨今のAIブームを受けて，さまざまなサービスが生まれつつありますが，緒に就いたばかりのサービスが多いこともあり，非常に多くの課題があります．特にAI・LLMをサービスに利用しようとした場合に，コストとセキュリティの課題はインパクトが大きいため，意識的な情報収集と技術開発を始めました．コストに関しては，自らもLLMのコスト削減方法についての技術開発を行いつつ，AIチップなどのシリコンバレーならではのさまざまなアイデアに注目し，情報を収集しています．セキュリティについては，米国での活用事例などを見つつ，実際に起こり得る課題等を適用例から具体的に整理・発見するところに注力しています．

このほか，違った観点の大きな注力テーマとして「文化の理解」があります．米国でのビジネスの成功やオープンイノベーションを推進するためには，その背景である文化の理解が欠かせません．サービスが流行する理由や環境を理解しないまま，可能性のみで日本にそのサービスを適用しようとしても失敗することが多いと考えていますし，実際にそのような事例もあります．もちろん言語的な意味での違いだけではなく，米国に住んでみないと理解できないような生活に根付く文化の違いに関する情報をドコモイノベーションズは持っています．これらも重要なテーマ・知見と位置付け，ビジネス開発などに応用しています．

■具体的にどのような取り組みをされているのでしょうか．

近年の大きな開発例の1つに，Federated Learning（連合学習）の実装技術の開発があります．これは，データをお互いに共有せずに，そのナレッジや学習結果のみを共有する方法で，機微な個人情報を保護しつつ，業界横断の新しいナレッジを共有できるというものです．AI・LLMを用いたサービスが中心となる世界で必要となる技術で，NTT研究所や米国に拠点を置く会社と協力して開発を行っています．これ以外にも生成AIを用いた3Dコンテンツ生成技術や，RAN（無線アクセスネットワーク）に対してのシミュレーションや最適化への応用技術など，NTTドコモグループやNTTグループ全体で将来的に利用されると思われる技術を先行して調査研究・開発しています．

注目エリア	取組状況，ベイエリアの概況	想定貢献先
IOWN	NTT-Rとの連携やNTT持株の動向を踏まえつつ，USでの実験やLinux Foundation での活動などをサポート．関連投資活動などでも調査業務で連携．	持株IOWN室，他グループ各社
5G/6G/NTN	5G/6Gでのシミュレーション性能検証から置局設計方式などの提案．さらにはトラフィック解析方法の検討などを提案．NTNなどの先進領域の現地企業の交渉などもサポート中．	NW部，無ア部，NTN推進室
Edge Computing	エッジでのAI実現などのUSでの事例などを先取りし,インプット．特にMECなどの米国での応用事例を基にしたBD面でのサポートなどを中心に実施しつつ,無人店舗などの応用も調査．	SD部，SI部，Nコム
AI/LLM/GenAI	Federated LearningなどのAIのビジネス適用の必須技術からGenAIのXR応用まで幅広く貢献．さらにAI Chipなどの今後起こり得るであろう問題の先取りなどを通じて貢献．	SI部，他多数
XR	GenAIを用いた応用例や，デジタルツイン化への貢献．米国でしか発売していないXRデバイスなどの紹介や新しいビジネスの紹介など．協業先などの選定にも寄与．	NTT QONOQ，Metame
IoT	IoTデバイス領域での規格統一の動きや，エコシステムへの取り込みが盛んなため，戦略面や法制度面，標準化動向（コンソーシアムなど）などの情報を収集．	関連部署多数
Web3	Web3のさまざまなビジネスやエコシステムに関連する領域の調査業務を中心に展開．	NTT Digital
Robots	実世界へのアクチュエータとしての役割は大きく，日本では使われていないような領域のビジネス展開などを検討．特に自動運転や電動自動車の日本展開の周辺技術は注目度高．	Nコム，SLカンパニー
Sensors	ヘルスケアデバイスなどのセンシングデバイスなどを注目．他にも新しいセンサデバイスの取り込み，もしくは既存デバイスの応用などもベイエリアでは多数あるため，継続して注視．	PM本部他，関連部署多数
Quantum computer	直接的な量子コンピューティングだけではなく，量子コンピュータが出来た世界での新しいビジネスに注目．すでにセキュリティ領域などでは,次のビジネスなどが注目されているため注視．	XT部

図2　技術領域と貢献先

また，2023年から始めた取り組みとしてOpen Innovation Bootcamp（OIB）があります．これは前述した「文化の理解」を具体的に感じてもらいつつ，ビジネス開発に直結する取り組みとして始めました．日本から参加者を募り，米国で1週間滞在し，その間にさまざまな視察や有識者との会合，ビジネス案の創出を行い，最終日に幹部や上長の前でプレゼンテーションするというプログラムです．参加者は渡米前から，自らのビジネスにおける課題の本質を分解し，ビジネスアイデアをまとめるなどの準備を行い，それを米国の環境の中でブラッシュアップ，場合によっては検討のやり直しも必要になるという，非常にタフなプログラムですが，グローバルビジネスの視点を学ぶ機会として非常に高い評価をいただいています．

先進的なサービスが多数存在するシリコンバレーで，中長期的な観点からNTTグループに貢献

■今後の展望についてお聞かせください．

ドコモイノベーションズはR&Dの子会社ですので，研究開発の観点を軸として新しいものを積極的に取り込んでいくことをめざしています．特にNTTドコモでは取り組みにくいテーマや，すぐにビジネスにならないようなことでも，先進的なサービスが多数存在するシリコンバレーで，中長期的な観点からも探索していくことを心掛けています．また，ビジネスを実現するための技術に伴うコストやリスクなどにも目を配り，NTTドコモグループの事業会社に対して，「実現可能なパッケージ」として提供するということに気を配っています．従来はNTTドコモのR&Dやプロダクトマーケティング本部，スマートライフカンパニー（現コンシューマサービスカンパニー）への貢献がほとんどでしたが，NTTグループ全体への貢献ができるように体制を切り替えています．

情報伝達手段の進化で不可能を可能にする

AI & Data Analytics
Innovation Group,
Senior Research Engineer
David Ramirez　さん

■担当されている業務について教えてください.

私はドコモイノベーションズの研究者として,「どこまでが私たちの手の届く範囲なのか」を調べる長期的研究,「そこにどうやって到達できるのか」を調べる中期的研究,「現在の立ち位置から,次のステップは何か」を調べる短期的研究の3つの性質の研究を担当しています.

私の研究は,対外発表を通じてNTTドコモが無線通信研究コミュニティ内で高い評価を獲得することに貢献しています.例えば,北米のNextG Allianceへ参画し,次世代ワイヤレスネットワークへの技術的アプローチを議論し,NTTドコモにおけるネットワーク戦略の策定に役立っています.また,ネットワーク最適化に関しては,アルゴリズムによる解決策と評価を通じて,商用ネットワークの改善に貢献しています.

多くの学術論文は,特定の前提条件における最適解が示されますが,実際にどの前提条件が適用され（ネットワークパラメータの最適化),それがどのようにネットワークにインパクトを与える（期待されるパフォーマンスを示す）のかを見極める,という課題に直面することがよくあります.この課題に対処するために,通信ネットワーク,情報理論,最適化に関する専門知識等の研究文献調査,数学モデルとソリューション作成,シミュレーションによる評価を行い,NTTドコモのネットワークにフィードバックします.

■今後の展望について教えてください.

人々のために情報伝達手段を進化させることをめざしています.技術の進化により,ネットワークを介してさまざまなことが実現され,世の中を便利にしました.しかし,現在においても,不可能だと思うことがあります.例えば,日本中にセンサを配置して高精度の測定を行うことは,東京のダウンタウンにあるものよりも高密度のデバイスをネットワークに配置する必要があり,現実的には不可能だと思います.

しかし,Joint Communication and Sensing（通信とセンシングを統合した技術）を使用すると,現在使用しているテクノロジを最小限または全く変更することなく,セルラネットワークで環境を感知することが期待できます.エッジコンピューティングとデータ分析により,ネットワークのアクセスポイントでのデータ量を削減することが期待できます.不可能を可能にするために,情報伝達手段を進化させていきたいと考えています.

オープンイノベーションによる新しい価値創造の実現をめざすOIB

Open Innovation Strategy
Group, Strategic Alliance
Manager
椎野 彰太　さん

■担当されている業務について教えてください.

オープンイノベーション戦略担当は,シリコンバレー拠点の強みを活かし,有望スタートアップのビジネスアイデアや新しい技術の発掘・目利きを行い,ドコモ本社事業部へ情報を発信し,事業開発に向けた連携を促進するイノベーションハブの役割を担っています.

その中で,外部企業との技術・アイデアの流動性を高め,新たな製品やサービスの提供価値を生むための手法として知られる「オープンイノベーション」を実行できるプロセスの確立,および人材の必要性が増しています.

そこで,シリコンバレーの新しい技術やビジネスアイデアを日本市場で活用し,実際に事業導入して継続する仕組みとしてOIBを2023年に立ち上げました.

■今後の展望について教えてください.

OIBは,成長領域の事業リーダーを対象にシリコンバレー流の情報収集手法,事業への取り込み手法,商習慣の違いをとらえた協業手法を,現地ならではの体験を交えながら学習し,オープンイノベーションによる事業開発の検討を行うプログラムです.このプログラムを通じて商用化まで進んでいるプロジェクトもあり,着実な効果が現れています.

今後は,ドコモグループにとどまらずNTTグループ全体にも視野を拡げ,OIBを軸としたオープンイノベーションによる新しい価値創造を実現していきたいと考えています.

既存事業との相乗効果を生むビジネスモデルの設計に取り組む

Product Planning &
Strategy Group, Manager
松嶌 信貴　さん

■担当されている業務について教えてください．

サービス・デバイス一体での新たな価値創出の強化を目的に，ヘルスケア，スマートホームおよびAIを注力領域として，NTTドコモでの事業創出・強化への貢献をめざしています．主な業務は現地企業・スタートアップの技術検証，パートナーシップの形成，日本のNTTドコモに最適化したビジネスモデルの立案および事業開発です．一方，新しいプロダクト単独ではインパクトのある収益の達成は容易ではないため，既存事業との相乗効果を生むビジネスモデルの設計が課題となります．そのため，注力領域と協調性のある既存事業・中期戦略を持つ組織とも直接協力し，現地企業紹介にとどまらず，継続的に事業設計・創出に協力しています．

■今後の展望について教えてください．

既存事業と組み合わせて好循環になるプロダクトを事業化できることが理想的です．そのため，米国の成功事例と日本のビジネス環境を理解し，プロダクトとビジネスモデルをセットで提案していきます．

私の担当業務においては，スマートフォン上で動作するオンデバイスAIに注目しています．オンデバイスAIによりプライバシーを侵害せず，デバイスワイドな支援が可能になるため，スマートフォンの利用方法やデバイス・サービス市場を革新できる可能性があると期待しています．従来のアプリ単位でのサービス提供が，よりパーソナライズされ，さらにはアプリ横断的なユーザの目的達成もサポートできると考えています．NTTドコモが以前から継続的に取り組んできたコンシェルジュ機能との親和性も高く，ご協力いただいてきたパートナー企業様も含め，エコシステム全体の発展に貢献したいと考えています．

DOCOMO Innovations, Inc. ア・ラ・カ・ル・ト

■民間外交官

米国ではNTTやNTTドコモという会社名は業界以外ではあまり有名ではありません．そのため，社員の採用などでは非常に苦労しますが，現地で採用された社員は，日本の文化や日本での貢献に興味があるメンバーが多く，積極的に日本の状況を知ろうとしたり，日本のメンバーとのコミュニケーションを取ろうとしてくれるそうです．中には日本語が話せる社員もいますが，対話は英語になります．逆に，日本からの社員は，言語を超えた文化の交流を通して民間外交に貢献している気持ちになるそうです．

■出社日のランチでコミュニケーション

ドコモイノベーションズではテレワークが基本ですが，月曜日と水曜日の週2回を出社日としているそうです．この日にチームでの議論や，全体の勉強会などを行うとともに，会社から提供されるランチを摂りながら皆で会話をし，コミュニケーションを図りながらクリエイティビティを高めているとのことです．GAFAMをはじめ，ベイエリア全体でも出社日を設ける流れが多くなってきているそうです．対面環境のほうが生産性向上を図ることができる，と信じている経営者が多い印象ですが，まだコロナ禍後の試行錯誤の状態のようです．一方で，出社日が多くなったことで，高速道路をはじめ周辺の道路の渋滞も多くなってきており，通勤の苦労が増えたとのことです．

■社員家族全員でクリスマスパーティ，サンタも登場

ドコモイノベーションズでは前身のNTTドコモUS研究所の時代から，社員の家族全員を招待して，日頃の苦労を労いつつ家族での交流を図る，クリスマスイベントを開いています（**写真**）．コロナ禍で数年実施できなかったのですが，2023年に復活させたそうです．社員は正装して参加し，子ども全員にサンタさんからクリスマスプレゼントがあり，とても楽しいイベントのようです．以前から在籍している社員のお子さんが，小さいころに参加したことをいまだに覚えていて，良い思い出になっているとのことです．

写真　クリスマスパーティ

URL https://journal.ntt.co.jp/article/27033
DOI https://doi.org/10.60249/24073101

IOWN Global Forum
第４回年次会合と活動状況の報告

2024年４月23〜26日に，IOWN Global Forum（IOWN GF）は，カナダ・バンクーバーにて，第４回年次メンバー会合を開催しました．世界各国から約350名のメンバーが参加し，年間活動実績や計画，ユースケースや技術検討の活発な議論がなされました．４月25日には，IOWN GF主催の初めての一般公開イベントであるFUTURESも開催し，IOWN技術の重要性や展開について講演がありました．ここでは本会合の模様と合わせて最近の活動状況について報告します．

第４回年次メンバー会合（バンクーバー）

IOWN Global Forum（IOWN GF）では，毎年４月に全メンバー向けの年次総会を開催し，年間活動実績の共有や貢献メンバーへの表彰およびWorking Group（WG）/Task Force（TF）のミーティングを実施しています．このほか，10月にもメンバー会合を開催して進捗確認や次年度計画の議論を行っています．これら２回のメンバー会合に加えて，２回の技術検討ワークショップを実施しています．

今回，2024年４月23〜26日に，第４回となる年次メンバー会合をカナダ・バンクーバーにて開催しました．現地には世界14カ国，86の会員企業・組織から，210名の参加者を迎え（**写真**），137名のオンライン参加者も加わって活発な議論がなされました．

オープニングセッションでは，President and Chairpersonの川添雄彦NTT代表取締役副社長が，メンバーの努力への感謝とともに，最近の成果として，日米首脳会談におけるファクトシートへの記載，MWC 2024への参加，新メンバーの加入などについて述べ，さらなる展開とメンバーの協力の必要性について強調しました．

また，IOWN GFのディレクター５名について改選結果の発表があり，Rong-Ruey Lee氏（Chunghwa Telecommunication），Giovanni Manto氏（Nokia）の２名が新たにBoD（Board of Directors）に加わることが発表されました．

続いて，CienaのSteve Alexander氏が基調講演「Faster, Closer and Greener: The IOWN All-Photonic Network」と題して，より速く，より近く，より環境に優しいコネクティビティに対する世界の高まるニーズにこたえるための，オールフォトニック・ネットワーク（APN）の必要性について講演されました．

さらに，IOWN GFのSteering Committee（SC）やWGの活動に顕著な貢献をしたメンバーへの年間表彰プログラムにおいて，以下の６名が表彰されました．

- 久野浩氏（ソニーグループ）：将来を見据えたユースケース，ベンチマークモデル，リファレンス実装，AIC-Interactive Live EntertainmentのPoCレポートおよび早期導入ユースケースへの貢献
- Lieven Levrau氏（Nokia）：IOWN GF Vision 2030 White Paperの最新リリースで強調されたエネルギー効率テーマへの貢献
- 村瀬友英氏（三菱ケミカル）：CPS-Industry Managementの将来を見据えたユースケース，ベンチマークモデル，リファレンス実装およびPoCレポートへの貢献
- Christoph Schumacher氏（NTT）：タスクフォースリーダーとしての卓越した貢献とIOWN Global Forum文書の質向上への貢献
- 杉山秀次氏（Red Hat）：CPS-Area ManagementユースケースのPoCレポートへの貢献
- 山本浩司氏（NTT）：2023年12月のITU CxOミーティングでのコミュニケーション，プロモーション，サポート体制確立による標準化に向けた活動への貢献

メンバーからのプレゼンテーションとして，KDDI，NEC，Rakuten Mobile，VIAVIの４社から発表が行われました．林通秋 氏（KDDI） は，「Paving a Way Toward the Global

写真　会合参加者

Standard of APN」と題して，スマートで持続可能な未来を実現するためのAPNと標準化について講演しました．福井賢二氏（NEC） は，「Toward Accelerating Early Adoption Use Cases from the APN Controller Point of View」の発表で，早期導入ユースケースを促進する必要性を強調しました．Ayaz Bankapur 氏（Rakuten Mobile） は，「Optimizing Optical Transport Networking with Adaptive Resources: An AI-Driven Approach」と題して，ユースケース，課題，楽天のテレコムAI戦略の検討課題に関して発表しました．Sameh Yamany 氏（VIAVI Solutions） は，「Synergizing IOWN Objectives with Open RAN: Achieving Seamless Harmonization」 として，Open RAN（Radio Access Network）に関する2030年のVIAVIのビジョンとIOWN GFにおける連携・支援について述べました．各発表に対して，聴講メンバーとの活発な質疑が行われ，今後の活動への組み込みが提案されました．

会合では，これらのプレゼンテーションのほかに，WG/TFでのワークショップ，分科会が行われました．金融サービス・インフラ，放送メディア遠隔制作，ファイバセンシング，データセンタ間接続とグリーンコンピューティング，6G，デジタルツイン・アプリケーションなど，最新のユースケース，業界へのインパクト，ビジネス適用に関するさまざまな議論が活発に行われました．

次回のメンバー会合は，2024年10月 8 ～11日に台湾・台北で開催されることが発表されました．

FUTURES：初の一般公開イベント

4 月25日には，IOWN GF初の一般公開イベント「FUTURES - Powering Tomorrow with Photonics」を開催しました．このイベントでは，外部参加者を含む200人以上の会場参加者と70人以上のオンライン参加者が出席し，IOWN GFの活動，ビジョンと実績に関して対外的に発信を行うとともに，より広範な業界関係者が光技術をキーとして将来ビジョンを実現するための役割とビジネス機会についてオープンな議論を行う場となりました．

IOWN GFのリーダーシップメンバーから，光技術による持続可能な世界への変革に向けた活動，2030年ビジョンと現在の成果の紹介がありました． また，Linux FoundationのArpit Joshipura氏からの招待講演として，「IOWN and the Linux Foundation - Open Source Collaboration for Driving the Future of Communication Infrastructure」と題して，リエゾン関係を結んでいるLinux FoundationとIOWN GFが将来の通信基盤を担う技術開発においていかに連携を加速していくかについての講演がありました．

さらに，Rod Naphan氏（富士通），Derrick Buckley氏（マイクロソフト）からの各社取り組みの紹介の後，パネルディスカッション「The Possibilities of IOWN Technologies」が行われ，Computer Weekly の Networking Editor で ある Joe O'Halloran氏が司会を務め，Ciena，Ericsson，Nokia，Sonyからのパネリストが参加して，IOWN技術の可能性について，議論されました．

IOWN GFの活動状況

IOWN GFでは，IOWN技術の実装を促進し，「Vision to Reality」を実践するために，PoC (Proof of Concept) を外部活動としつつ，IOWN GFによる「Recognized PoC」の認定を行うプログラムを開始しました．PoCチームは，IOWN GFが公開するPoCリファレンスに基づいて開発したPoCについて，PoCレポートをIOWN GFに提出します．対象分野の専門家による厳密な評価を経てIOWN GFが認定した「Recognized PoC」は，IOWN GFが発行するPoCリファレンスを参照し，IOWNベースの技術の実現，価値，パフォーマンスを実証するものです．2023年 9 月以降， 8 件のRecognized PoCが承認され，公開されています[1]．

また，IOWN GFの対外的な活動として，2024年 2 月に開催されたMWC24において，IOWN GFとして初めて外部セッションを実施し，200名以上が参加しました．90分間のセッションにおいて，IOWN GFのEricsson， 富士通，KDDI，Red Hat，SK Telecom，NTT各社のリーダーシップにより，スマートで持続可能な世界を創造するために，2030年までに重要な社会的・環境的課題に対処し，本質的かつ広範な次世代通信コンピューティング基盤を構築する技術ロードマップについて議論されました．また，技術パネルでは，IOWN技術の将来，IOWN GFの取り組み，これらの取り組みが通信業界をどのように変革するかについて議論されました．

さらに，IOWN技術の標準化に向けた取り組みとして，2023年12月 5 日，ITU-T CxO Roundtable会合において，川添副社長がIOWNによる国際コネクティビティの重要性について講演し，IOWN技術に基づいて，開発途上国を含む新しいネットワークをグローバルに展開するための標準化の必要性について述べました．会議参加者は，IOWN GFの価値と役割について確認し，連携の強化，ITU-Tによる国際標準の必要性が認識されました．

これらの活発な活動とともに，IOWN GFのメンバーは増加しています．過去12カ月で，AKKODiS，Googleのスポンサーメンバー 2 社を含め，AMD，ホンダ，NHK，TBS，パナソニック，東京海上日動，SOMPO，早稲田大学などの大手企業や大学等，29の企業・組織が新たに参画し，世界中の142の企業・組織が加入となりました．IOWN GFは，今後も新メンバーの加入を勧めるとともにメンバー間で連携した活動を加速していきます．

■参考文献
(1) https://iowngf.org/recognized-pocs/

◆問い合わせ先
NTT研究企画部門 IOWN推進室
E-mail iown-info@ntt.com

from